занимательные
ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧКИ

Этот сборник, составлен из статей журнала «ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ» издательства D^e*AGOSTINI.* В нем собраны задачи для испытания вашего интеллекта. Здесь предлагается множество игр и загадок, порожденных воображением великих мастеров математического досуга. Тем, кто захочет себя испытать, потребуются находчивость и терпение, но взаменони получат истинно интеллектуальное наслаждение на долгие часы.

Классические загадки

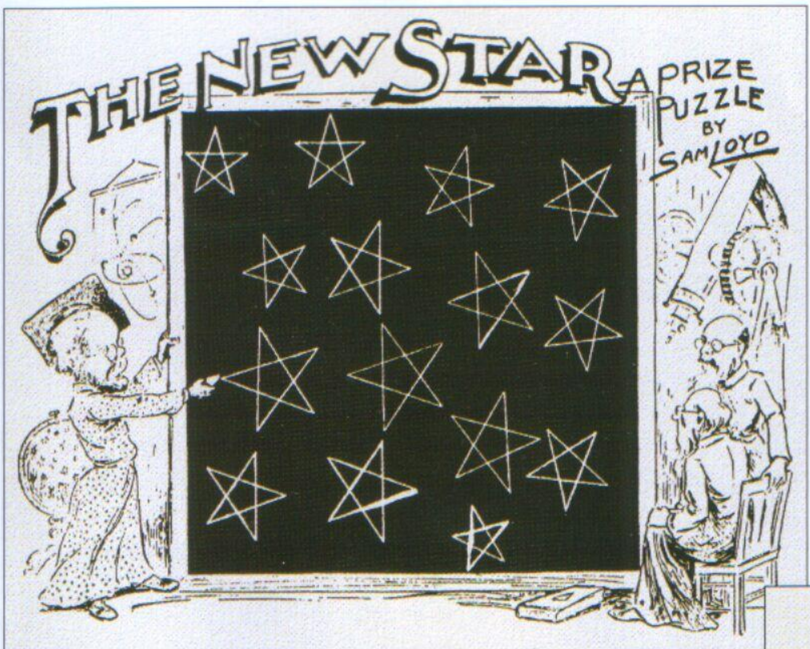
Лучшее из Сэма Лойда и Генри Дьюдени

Первые среди равных: Сэм Лойд и Генри Дьюдени

Американец Сэмюэль «Сэм» Лойд (1841—1911 гг.) и британец Генри Эрнест Дьюдени (1857—1930 гг.) в мире развлекательной математики фигуры легендарные. Оба были блестящими шахматистами (Дьюдени вошел в двадцатку лучших в мире), весьма талантливыми математиками-любителями и, в довершение этого, стали авторами сотен — нет, тысяч! — загадок и задачек, отличавшихся оригинальностью. Некоторые из них Лойд и Дьюдени сочинили вместе. Оба сотрудничали в самых серьезных изданиях своего времени, таких как лондонская The Strand или американская Scientific American. У Лойда было свое издание — «Журнал головоломок Сэма Лойда». Нет более воодушевляющих проводников в мир загадок, нежели эти истинные «гении изобретательности».

1. Новая звезда

Где можно разместить звезду первой величины?



Эта странная загадка была придумана на основании заявления некоего французского астронома, который уверял, что обнаружил новую звезду первой величины. На иллюстрации изображен ученый-профессор, описывающий свое новое открытие коллегам-астрономам. Он изобразил положение 15 звезд разной величины, и мы видим его в момент, когда он вот-вот покажет положение на небе новой звезды. Можете ли вы нарисовать пятиконечную звезду большего, чем все остальные, размера, но при этом не пересечь линией ни одну из имеющихся? (Лойд)

2. Помощь на равных

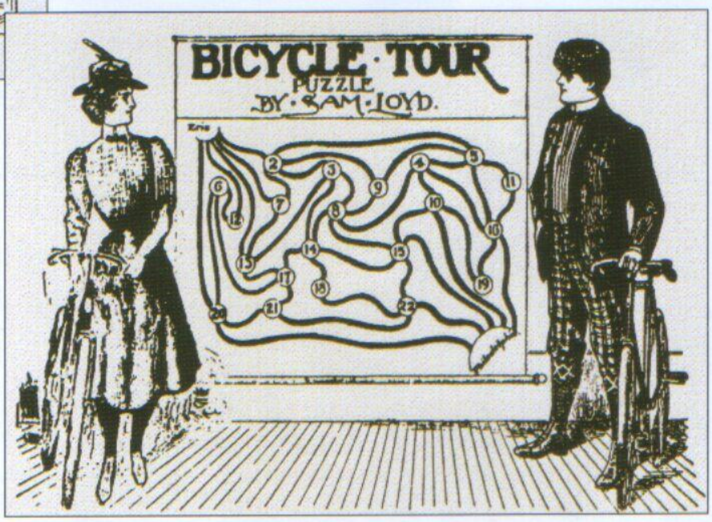
Некий щедрый господин шел вечером домой и по дороге встречал одного за другим нищих, которые просили его о помощи. Первому он дал лишь на пенс больше, чем половина имевшихся у него в кармане денег; второму — на два пенса больше, чем половина денег, оставшихся у него в кармане; и третьему — на три пенса больше половины остатка. Придя домой, он обнаружил, что у него остался лишь пенни! Скажите, сколько денег было у господина, когда он направился домой? (Дьюдени)

3. Пирушка велосипедистов

На днях мне рассказали, что однажды,
движения и приключений жаждя,
компания друзей отправилась в леса,
имея каждый под собой два колеса.
Привал в таверне древней на опушке
был превращен в веселую пирушку.
«Внесите все расходы в счет!» — кричат.
«Заплатим поровну!» — вещает главный фат.
Счет в восемьдесят пенсов принесен,
но беспорядок в плату тем внесен,
что двое, оседлав велосипеды,
увы, не стали ждать конца обеда.
Оставшиеся сэры были благородны:
Открыли кошельки, и каждый гордо
Два пенса сверх своих долей вручили досконально.
Так сколько ж было сэров изначально?
(Дьюдени)

4. Тур на велосипеде

Проложите маршрут из Филадельфии в Эри, лишь один раз побывав в каждом городе. На этой карте 23 важных города Пенсильвании, которые соединены велосипедными маршрутами более-менее художественным образом. Задачка проста:



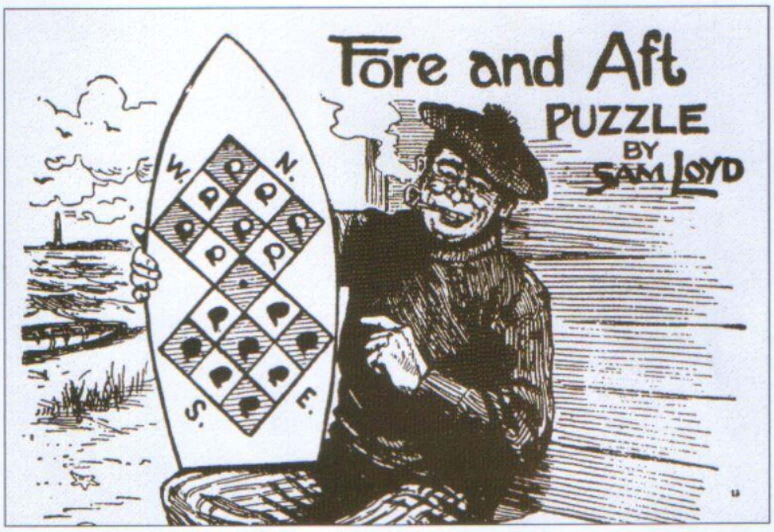
отправляйтесь летом отдохнуть из Филадельфии в Эри, проезжая по разу через каждый город, но следуя разными маршрутами. Города пронумерованы, чтобы участники могли описать маршрут посредством указания последовательности номеров. В этом путешествии не гонитесь за самым коротким маршрутом. Просто пройдите этот путь и не смотрите на счетчики расстояний. (Лойд)

5. Цена яблок

Я заплатил одному господину 12 пенсов за некоторое количество яблок, но они были такими мелкими, что я попросил добавить еще два. И я вдруг понял, что они обошлись мне на пенс дешевле за дюжину, чем если бы мне ничего не добавили. Сколько же яблок я купил на 12 пенсов? (Дьюдени)

6. До и после

Поменяйте местами белые и черные фишки наименьшим числом операций. Мне представляется возможность привлечь внимание к симпатичной загадке, даже в какой-то степени разновидности пасьянса, который был весьма популярен в Европе. Это английское изобретение, поскольку пришло в голову английскому моряку, который 40 лет своей жизни провел в доме для престарелых моряков Снаг Харбор, что на Статен Айленде в Нью-Йорке, и чьей невыразимой гордостью были плавания под началом капитана Рэндалла, основателя сей институции. Старый моряк чуть-чуть подрабатывал на карманные расходы (как он сам говаривал), продавая эти игры посетителям, по мере того как изготавливал их с помощью перочинного ножа. Так игра дошла до Лондона и обрела громкий успех под названием «Английская загадка шестнадцати», однако ее так никто и не стал продавать по эту сторону Атлантики. Цель игры — поменять местами белые и черные фишки минимальным количеством ходов. Каждая из них может быть передвинута с одного квадрата на соседний, если он пуст, или перепрыгнуть фишку любого цвета, если есть пустое место, куда приземлиться. Действия можно совершать только внутри одного ряда (как у ладьи в шахматах), и никаких движений по диагонали, как в шашках. Один очевидец утверждает, что моряк страшно гордился своей смекалкой и имел обыкновение сообщать покупателям одно правило, позволяющее поменять местами белые и черные фишки минимальным количеством ходов. Однако то правило было ошибочным и может быть занесено в список ненужных уловок. Возможно, с тех далеких времен мир изменился, поскольку правила, которые рекомендуют в английских книгах головоломок, как и в учебниках математики, все сплошь неверные и могут быть улучшены, дабы сократить ходы еще на пару. (Лойд)



Ответы

1. Предлагаемая схема показывает, как французские астрономы должны расположить новую поистине гигантскую звезду, затмевающую все прочие.

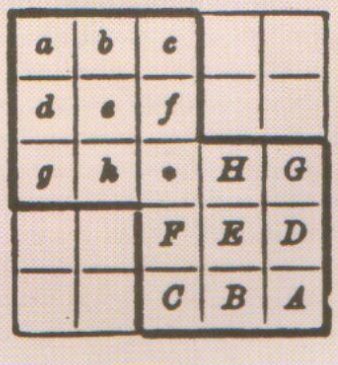
2. У господина было 42 пенса в кармане, когда он направился домой.

3. На привал приехали 10 велосипедистов. Им бы пришлось заплатить каждому по восемь пенсов, но, так как двое уехали, то оставшиеся заплатили каждый по 10.

4. Единственно возможный маршрут — это: Из Филадельфии на 15, 22, 18, 14, 3, 8, 4, 10, 19, 16, 11, 5, 9, 2, 7, 13, 17, 21, 20, 6, 12 и потом в Эри.

5. Мне предложили 16 яблок на каждые 12 пенсов, что означает 9 пенсов за дюжину. Плюс два дополнительных яблока — 18 яблок за 12 пенсов, что означает, что дюжина теперь стоит 8 пенсов, то есть на один пенс меньше, чем вначале.

6. Лойд не дает решение для этой загадки. Он говорит, что большинство книг дают ответ — 52 движения, в то время как их может быть 47. Дьюдени, эксперт в области английских загадок, улучшил этот результат до 46. Красивое симметричное решение Дьюдени мы взяли из книги W. Rouse Ball, Mathematical Recreations and Essays. Буквами обозначают клетки, откуда фишки ходят. Hhg • Ffc • CBHh • GDFfehbag • GABHEFfdg • Hhbc • CFf • GHh).



Льюис Кэрролл
Рассказ-головоломка

Льюис Кэрролл

Чарльз Лютвидж Доджсон (а именно таково настоящее имя Льюиса Кэрролла) родился 27 января 1832 г. в городе Дарсбери графства Чешир. Он был третьим ребенком (первым мальчиком) в семье англиканского священника Чарльза Доджсона и Фрэнсис Джейн Лютвидж. Фотограф, математик и писатель Кэрролл получил всемирное признание, опубликовав книгу «Алиса в Стране Чудес». Как свидетельствуют его дневники, Кэрролл придумал сюжет этой истории, пока прогуливался вдоль Темзы с преподобным Даквортом и тремя дочерьми декана Генри Лиддела (Лориной, Алисой и Эдитой). У Кэрролла вошло в привычку во время прогулок рассказывать девочкам выдуманные им истории, и та, что он рассказал 4 июля 1862 г., привела девочек в такой восторг, что Алиса попросила ее записать. И в том же году, на Рождество, Алиса получила в подарок рукопись, проиллюстрированную самим Кэрроллом. Три года спустя, в 1865 г., вышло первое издание книги с иллюстрациями сэра Джона Тэниэла. Огромный успех книги привел к тому, что появилась вторая часть — «Алиса в Зазеркалье».

Льюиса Кэрролла считают одним из первых математиков-логиков, после Джорджа Буля. Кэрролл более 40 лет преподавал в Оксфорде и под своим настоящим именем опубликовал множество статей и книг по математике, среди которых можно отметить «Логическую игру» и «Евклида и его современных соперников». Кэрролл умер в Гилфорде 14 января 1898 г. в возрасте 65 лет от бронхита.

Предисловие

Этот рассказ впервые был опубликован частями в *The Monthly Packet* в апреле 1880 г. В намерение автора входило скрыть (как ту пилюлю, что прятали в лакомство нашего детства столь же хитроумно, сколь бестолково) в каждом узелке одну или более математических задачек — арифметических, алгебраических или геометрических, как получится — для удовольствия и, возможно, развития талантов любезных читателей этого издания.

Л.К.
октябрь, 1885

Узелок 1. Все выше и выше

«Чертенок, води их то вверх, то вниз.»

Когда красноватые вечерние сполохи уже растворялись в черной тени ночи, случайный свидетель мог наблюдать поспешный — скоростью шесть миль в час — спуск по крутому склону горы двух путников; тот, что помоложе, прыгал с камня на камень с ловкостью оленя, в то время как его друг, чьи дряхлые члены явно страдали от того, что были облачены в кольчугу, принятую у туристов в этих местах, передвигался с трудом. Как всегда и случается в таких ситуациях, молодой прервал молчание первым:

— Я бы сказал, что мы хорошо идем! — воскликнул он. — Подъем нам дался не так легко!

— Конечно, хорошо! — пропыхтел старший путник в ответ. — При подъеме наша скорость не превышала и трех миль в час.

— А на равнине наша скорость равна...? — задал вопрос молодой, ибо не был силен в расчетах и предпочитал все детали подобного рода оставлять старшему товарищу.

— Четыре мили в час, — устало ответил второй путник, — и ни унции больше, — добавил он с любовью к метафорам, столь свойственной людям преклонного возраста, — и ни цента меньше!

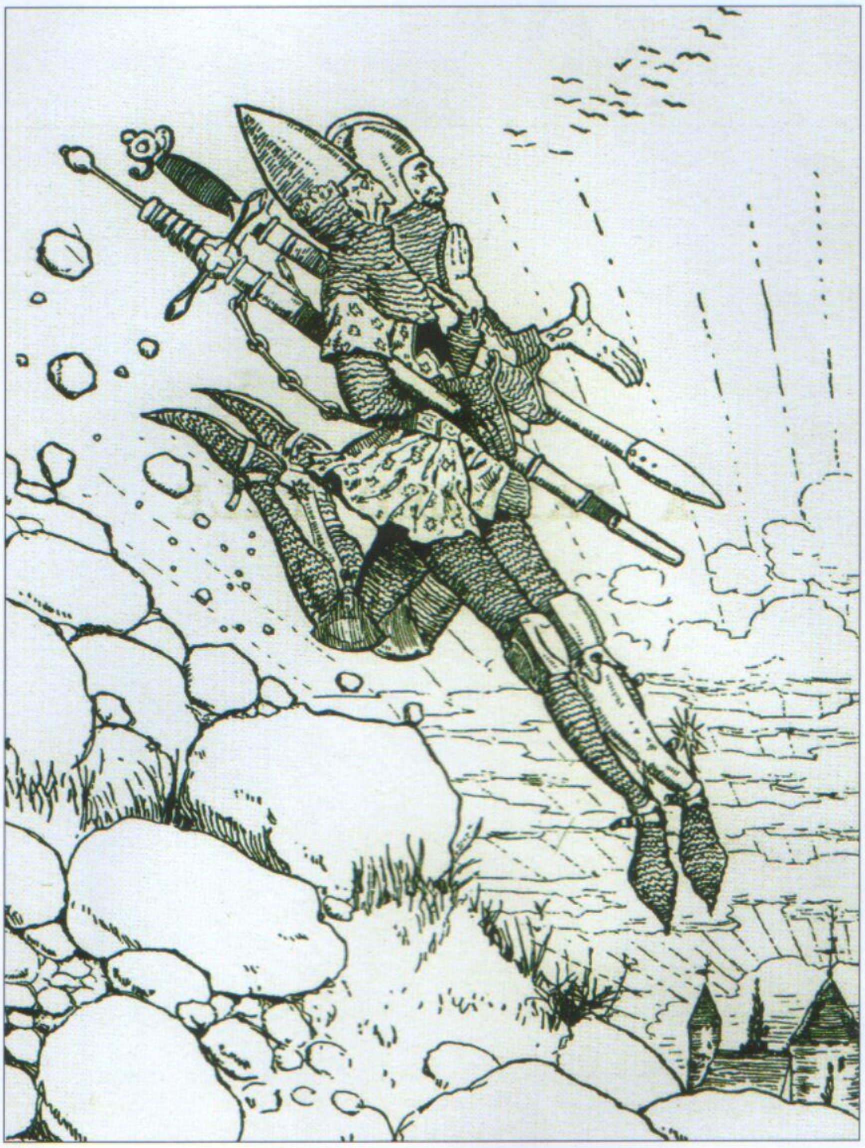
— Когда мы вышли из гостиницы, было три часа, — задумчиво произнес молодой, — и мы вряд ли вернемся к ужину... Весьма вероятно, что хозяин гостиницы наотрез откажется нас накормить!

— Он пожурит нас за позднее возвращение, — услышал он в ответ, — и его выговор будет совершенно справедливым.

— Да, сэр! — воскликнул его товарищ с веселым смешком. — И если мы у него попросим добавки, то весьма вероятно, что получим оплеуху!

— Удовольствуемся десертом, — вздохнул старший, в жизни не слышавший шуток и раздосадованный столь неуместным легкомыслием своего спутника. — Мы вернемся в гостиницу ровно в девять часов. Наверное, мы прошли сегодня немалый путь!
— Но какой, какой? — воскликнул молодой, охваченный волнением и вечной жаждой знаний.

Старший умолк на время.
— Скажи мне, — промолвил он после краткого молчания. — Который был час, когда мы поднялись на гору? Мне не нужно знать время с точностью до минуты, — добавил он, увидав протест на лице собеседника, — я даю тебе полчаса на погрешность. И ведь это все, что я прошу от сына твоей матери! А потом я сообщу с точностью до дюйма, какое расстояние нам удалось пройти с трех до девяти часов.
Ответ юноши больше походил на стенание, и выражение его лица и глубокие морщины, прорезавшие его мужественное чело, указывали на то, как глубоко в пропасть арифметической агонии увлек юношу безобидный с виду вопрос.



▼ *Льюис Кэрролл и изображение Алисы, героини известных книг, сделанное художником Джоном Тэниэлом, первым иллюстратором его произведений.*

Решение

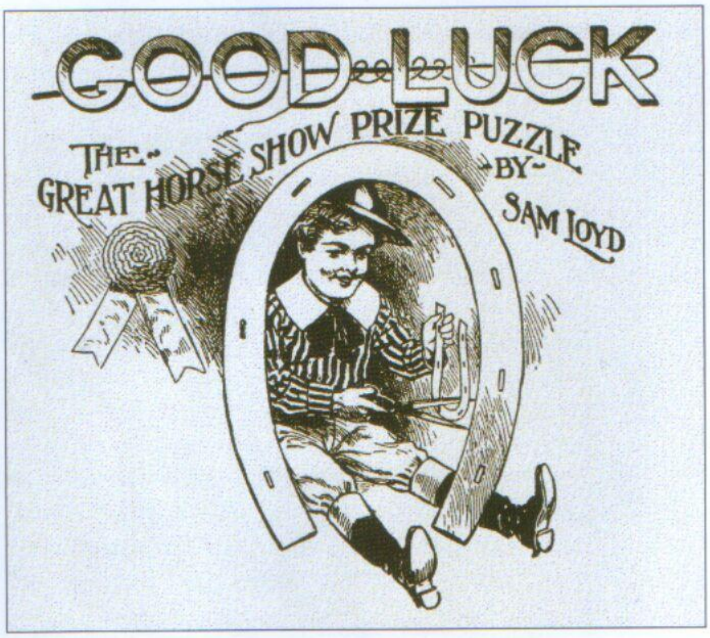
«Узелок!» — сказала Алиса. — «Дай-ка я его развяжу!»

Задачка:
Двое путников с 3 до 9 часов прошли путь по ровной долине, потом поднялись на гору и вернулись к началу маршрута. Скорость их движения по равнине составила 4 мили в час, при подъеме в гору — 3 мили в час, и на спуске с горы — 4 мили в час. Найдите пройденное ими расстояние, а также в какой момент (плюс-минус полчаса) оба путника оказались на вершине горы.

Ответ:
24 мили; в 6.30.

Решение:
Им понадобилось 1/4 часа, чтобы пройти одну милю по равнине, 1/3 — чтобы подняться на одну милю в гору, и 1/6 — чтобы спуститься. Путь туда и обратно по тому же маршруту — неважно, по горе или равнине, — занял бы полчаса. Так что за 6 часов они прошли 12 миль туда и 12 миль — обратно. Если бы 12 миль обратной дороги были в основном ровными, то путники затратили бы чуть больше трех часов, будь они гористыми — немногим меньше 4 часов. Так что они, скорее всего, затратили на путь до вершины 3.30, плюс-минус полчаса. А поскольку они вышли в 3 часа, то на вершину прибыли около 6.30, плюс-минус полчаса.

Классические загадки
Лучшее из Сэма Лойда



1. Подкова, приносящая удачу

С помощью двух разрезов поделите подкову на семь частей так, чтобы в каждой из них оказалось по отверстию для гвоздя.

Эта головоломка связана со старинной легендой о золотой подкове. История гласит, что золотую подкову двумя ударами меча разрубили на семь частей, в каждой из которых оказалось по отверстию для гвоздя, в которые продели семь ленточек. Кусочки подковы подарили семерым детям, которые повесили их на шею как талисманы удачи.

После первого разреза получившиеся части разрешается сложить стопкой, а потом разрезать еще раз. При этом оба разреза должны быть прямыми, бумагу не разрешается складывать или сгибать. Я предложил эту головоломку одному сообразительному юному жокею. Он вырезал бумажную подкову, первым разрезом разделив ее на три части, потом сложил их, сделал второй разрез и в результате получил шесть секторов. Но ведь задача состоит в том, чтобы получить не шесть, а семь частей!

Эта головоломка довольно проста, но интересна. Решив ее, вы можете испытать свои силы на более сложной вариации: какое наибольшее число частей можно получить с помощью двух разрезов? Условия задачи остаются прежними, только теперь вы можете не обращать внимания на отверстия для гвоздей.

2. Виноградник Марты

Во времена освоения Америки колонист, возделывавший каменистую почву на одном из островов у побережья Новой Англии, решил посадить виноградник. В этом ему помогала его маленькая дочка Марта, которой он в качестве поощрения за труды выделил небольшой участок земли площадью 1/16 акра. На нем девочка создала собственный виноградник. Марта высадила виноградные лозы рядами, на расстоянии девяти футов друг от друга, и ухаживала за ними точно так же, как это делали остальные. Тем не менее, вскоре о винограднике Марты заговорили в округе. Ей удалось собрать с акра куда больше, чем собирал любой другой виноградарь на этом острове, и к тому же вырастить немало новых и ценных сортов.

На этом история Марты и ее виноградника фактически заканчивается. Нисколько не сомневаюсь ни в талантах, ни в миловидности девочки, придававшей дополнительную сладость выращенным ею виноградным гроздьям, однако все же попытаюсь объяснить причину ее удивительного успеха с помощью практической задачки.

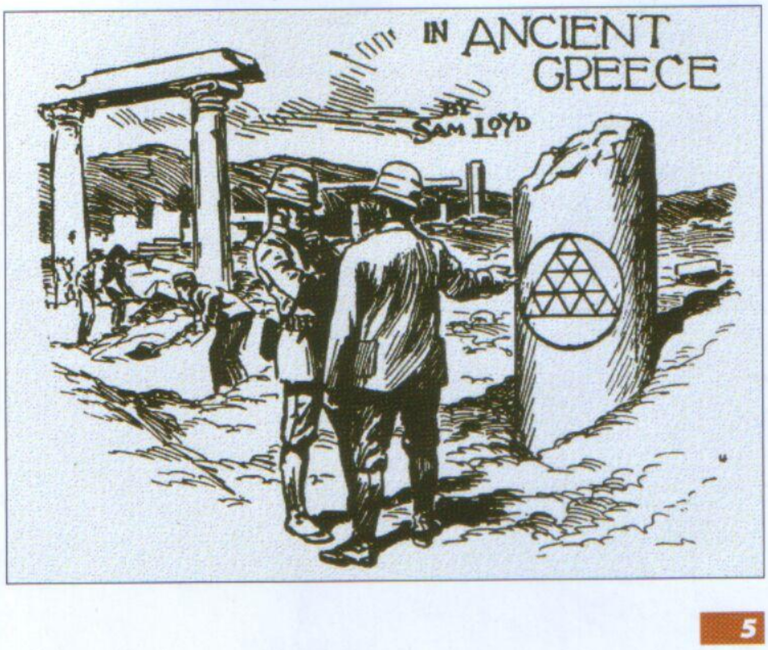
Сколько виноградных лоз можно посадить на квадратном участке площадью 1/16 акра так, чтобы каждая из них отстояла от другой не менее чем на девять футов?

Эта задача — великолепное испытание для математиков. Стоит лишь напомнить, что сторона квадрата площадью один акр равна 208 и 71/100 фута, следовательно, сторона квадрата площадью в 1/16 акра составляет 52 фута 2 дюйма (Из школьного курса известно, что один фут равен 12 дюймам).

3. А в древней Греции...

Нарисуйте греческую эмблему, делая как можно меньшее количество поворотов.

Разглядывая фотографии древнегреческих руин, привезенные из недавней археологической



экспедиции, я обратил внимание на необычную эмблему с изображением нескольких треугольников, заключенных в круг. Эта эмблема встречалась довольно часто, и как я узнал позже, многие ученые посвятили ее трактовке целые тома. Не буду с ними спорить, так как меня интересуют только ее математические особенности.

Очевидно, эмблема выполняла роль печати или подписи, потому что чаще всего встречалась на монументах. К своему удовольствию я обнаружил, что ее можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не обводя одну линию дважды. Но если принять условие, разрешающее обводить уже начерченные линии неограниченное количество раз, не отрывая при этом карандаша от бумаги, но делая как можно меньшее число поворотов, вы поймете, что перед вами — одна из самых замечательных головоломок.

4. Цыплята на кукурузном поле

Помогите фермеру и его жене поймать цыплят.

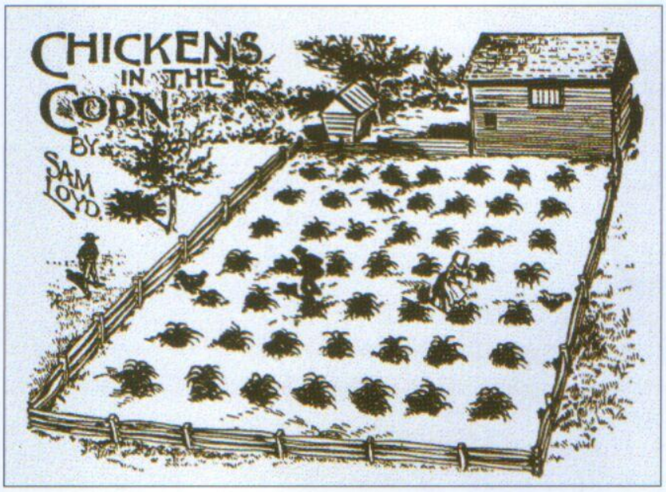
Мы часто умиляемся, наблюдая за веселыми играми щенков, котят и других домашних животных. Однако ничто не может сравниться с тем, как ведут себя цыплята, когда их пытаются выманить с поля или огорода. Эти птицы, по словам огородников, проявляют просто «дьявольскую смекалку». Они не улетают и не убегают прочь, а всего лишь топчутся неподалеку от своих преследователей, но при этом дотянуться до них невозможно. Более того, стоит незадачливым ловцам цыплят отказаться от своей затеи, как те сами начинают преследовать их, возмущенно кудахча.

Для горожан, проводивших летние каникулы на одной из ферм в Нью-Джерси, охота за цыплятами превратилась в ежедневное развлечение. В огороде всегда бегало несколько птиц, которые, казалось, только и ждали, когда их поймают. Их поведение натолкнуло на мысль о создании любопытной головоломки, которая, как я думаю, озадачит не одного эксперта.

Следует высчитать количество ходов, которые понадобятся фермеру и его жене для того, чтобы поймать петушка и курочку, выбежавших на кукурузное поле.

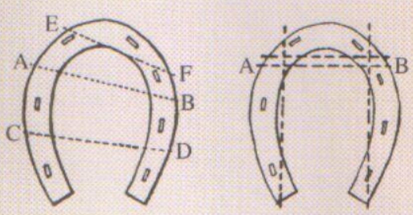
Поле поделено на 64 квадратных участка, по краям каждого из них растет кукуруза. Задействованные в игре фигуры переходят из одного квадрата в другой только по прямой, то есть вверх, вниз, вправо или влево. Ходы делаются поочередно. Сначала фермер или его жена передвигаются на один квадрат вперед (или в сторону). Затем наступает очередь двух цыплят, каждый из которых также делает свой ход. Игра продолжается до тех пор, пока цыплята не оказываются загнанными в угол, то есть пойманными. Если фермеру или его жене удалось ступить на квадрат, занятый цыпленком, то он считается пойманным.

В эту игру можно играть на любой квадратной доске, например, шахматной, представив фермера и его жену фишками одного цвета, а цыплят («петушка» и «курочку») — фишками другого цвета.



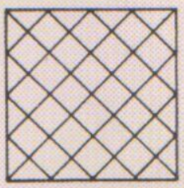
Ответы

1. Сначала сделайте разрез AB, затем сложите три образовавшиеся части так, чтобы разрезы CD и EF можно было сделать одновременно.

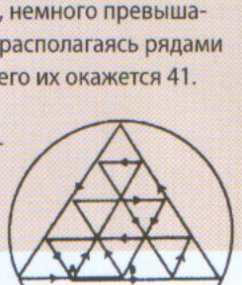


На соседнем рисунке показано, как с помощью двух прямолинейных разрезов можно разделить подкову на девять частей. Сначала проведите разрез AB, а затем сложите три части вместе так, чтобы каждую из них можно было разделить еще на три части одним взмахом ножниц.

2. Проведем диагонали квадрата и параллельные им прямые, как показано на рисунке. Тогда посаженные в точках пересечения виноградные лозы будут отстоять друг от друга на расстояние, немного превышающее девять футов, располагаясь рядами внутри изгороди. Всего их окажется 41.



3. Греческую эмблему можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и сделав 13 поворотов, как показано на рисунке.



4. Забавная особенность этой головоломки состоит в том, что фермеру никогда не удастся поймать петушка, а его жене — курочку, ибо, как принято говорить при игре в шахматы или шашки, петушок имеет по отношению к фермеру преимущество в один ход. По этой же причине фермерша никогда не сможет поймать курочку. Но вот если фермер погонится за курочкой, а его жена — за петушком, они с легкостью поймают птиц! Одного из цыплят можно поймать на восьмом ходу, другого — на девятом.

Задачи о возрасте и родственных связях

◄ *Сколько лет маме, Томми и папе?*

«Дней лет наших семьдесят лет».

Псалтирь, 89:10

На протяжении веков математические задачи нередко представляли в виде вопросов, касающихся возраста того или иного человека. Как правило, решение алгебраическими методами оказывалось несложным, зачастую трудность представляли корректные формулировки. Условия таких задач могли быть довольно запутанными, для их решения требовался талант, общие правила для них были неприменимы. Читателю приходилось призывать на помощь свою сообразительность.

Что касается задач о родственных связях между людьми, их способность ставить в тупик удивительна. Даже в повседневных разговорах некоторые замечания, касающиеся родственных связей и совершенно очевидные с точки зрения говорящего, порой озадачивают его слушателей. Выражения вроде «сестра зятя дяди» кажутся бессмысленными без подробных и утомительных объяснений. В таких случаях удобнее всего наскоро набросать генеалогическую схему, чтобы внимательный взгляд пришел на помощь уму. Поскольку в настоящее время семьи стали менее разветвленными, большинство людей не имеют навыка рисования подобных схем, и это печально, потому что в некоторых случаях они могут сэкономить время и вместе с тем избавить слушателей от необходимости ломать голову.

1. Возраст мамы

Томми: «Сколько тебе лет, мама?»

Мама: «Дай-ка подумать, Томми... Общий возраст нас троих — ровно 70 лет».

Томми: «Так много! Сколько же лет тебе, папа?»

Папа: «Всего лишь в шесть раз больше, чем тебе, сынок».

Томми: «А мне когда-нибудь будет вдвое меньше лет, чем тебе, папа?»

Папа: «Конечно, Томми, и тогда сумма возрастов нас троих ровно вдвое превысит теперешнюю».

Томми: «А если бы я родился раньше тебя, папа, а мама забыла бы об этом, и если бы ее не было дома, когда я родился, тогда...»

Мама: «Тогда тебе давно пора в кровать, Томми. Идем, детка, а то головка разболится».

Будь Томми постарше, он сумел бы вычислить точный возраст родителей на основании полученной от них информации. А вы сможете точно определить, сколько лет маме?

2. Задача для переписчика

В семье Джоркинс 15 детей, все они рождались с разницей в полтора года. Самая старшая дочь, Ада Джоркинс, постеснялась во время переписи назвать свой точный возраст, но призналась, что он всего в семь раз больше возраста ее младшего брата Джонни. Сколько лет Аде? Решая эту задачу, не спешите, иначе наверняка ошибетесь!

3. Пакет орехов

Трое детей получили в подарок на Рождество пакет орехов и договорились разделить их между собой пропорционально возрасту, который в сумме составлял 17 с половиной лет.

В пакете было 770 орехов, и если Герберт брал четыре, то Роберт брал три, а если Герберт брал шесть, Кристофер брал семь. Требуется найти, сколько орехов досталось каждому ребенку и сколько ему было лет.

4. Запутанное родство

— Кстати, о родственных связях, — сказал за ужином священник, — наши власти устроили страшную путаницу с брачными законами. Возьмем, к примеру, один невероятный случай, который привлек мое внимание. Два брата женились на двух сестрах. Муж одной умер, жена другого брата тоже умерла. После этого оставшиеся в живых поженились.

— Муж женился на сестре своей умершей супруги, что разрешено новыми законами? — вмешался адвокат.

— Вот именно. Следовательно, согласно гражданскому законодательству, он состоит в законном браке, и его ребенок законнорожденный. Но дело в том, что этот мужчина — брат покойного супруга своей жены, и по тем же законам она не считается замужней, а ее ребенок — законнорожденным.

— Получается, что он женился на ней, а она не вышла за него? — воскликнул врач.

— В некотором роде. А ребенок — законный для отца, но незаконный для матери.

— Безусловно, этот закон — бессмыслица, — заявил художник, — если вы не против подобных выражений, — добавил он, повернувшись к адвокату.

— Конечно, — последовал ответ. — Мы, адвокаты, стремимся укротить это чудовище и заставить его служить человеку. Во всем виноваты наши законодатели.

— Мне, кстати, — продолжал священник, — вспомнился один мужчина из моего прихода, который обвенчался с сестрой его вдовы. Так вот, у этого человека...

— Минутку, будьте любезны, — прервал профессор. — «Обвенчался с сестрой его вдовы»? Вы венчаете усопших?

— Нет, но я потом объясню, в чем дело. Итак, у этого человека есть родная сестра. Их зовут Стивен Браун и Джейн Браун. На прошлой неделе Стивен представил мне одного молодого человека, своего племянника.

Разумеется, в разговоре я назвал Джейн его теткой, однако, к моему удивлению, молодой человек поправил меня, пояснив, что хотя он и приходится племянником Стивену, но Джейн, сестре Стивена, он не племянник. Поначалу я растерялся, однако понял, что он совершенно прав.

Адвокат первым добрался до сути этой загадки. А какую разгадку предложили бы вы?

▲ *Мэри и Мармадьюк с удовольствием гуляют по парку.*

5. Мэри и Мармадьюк

Мармадьюк: «Представь, дорогая, через семь лет нам на двоих будет 63 года!»

Мэри: «Правда? А когда тебе было столько же лет, сколько мне сейчас, тебе было вдвое больше, чем мне тогда. Я вчера подсчитала».

Итак, сколько лет Мэри и сколько Мармадьюку?

Решения

1. Маме 29 лет и 2 месяца, папе 35 лет, а Томми 5 лет и 10 месяцев. В сумме получается ровно 70 лет. Отцу в шесть раз больше лет, чем сыну, а когда пройдет 23 года и 4 месяца, их общий возраст составит 140 лет, и Томми будет вдвое меньше лет, чем его отцу.

2. Аде Джоркинс 24 года, ее младшему брату Джонни 3 года, 13 братьев и сестер по возрасту занимают промежуточные положения между ними. Подвох заключен в словах о возрасте, который «в семь раз больше» возраста Джонни. Как правило, при этом забывают учесть сам больший возраст. По сути дела, это различие не в семь, а в восемь раз. Подобная досадная ошибка встречается даже у лучших авторов задач. Правы те читатели, которые подсчитали, что возраст сестры и брата — 24 с половиной и 3 с половиной года соответственно.

3. Когда Герберт взял 12 орехов, а Роберт и Кристофер — 9 и 14 орехов соответственно, всего за один раз было взято 35 орехов. Поскольку 35 содержится в 770 всего 22 раза, от нас требуется умножить 12, 9 и 14 на 22, чтобы узнать, что Герберту досталось 264 ореха, Роберту — 198, а Кристоферу — 308. Далее, поскольку их общий возраст — 17 с половиной лет, или половина суммы 12, 9 и 14, соответственно возраст детей — 6, 4 с половиной и 7 лет.

4. Если мужчина женился на женщине, которая затем умерла, а потом женился на сестре своей умершей супруги и тоже умер, значит, правильным будет сказать, что раньше он был женат на сестре его вдовы.

Молодой человек не приходится Джейн Браун племянником, потому что он ее сын. Она носит ту же фамилию, что и ее брат. Хотя Браун — ее фамилия в браке, она могла выйти за однофамильца.

5. Возраст Мармадьюка — 29 лет и 2/5, возраст Мэри — 19 лет и 3/5. Когда Мармадьюку было 19 лет и 3/5, Мэри было 9 лет и 4/5, то есть Мармадьюк был вдвое старше Мэри.

Льюис Кэрролл
История с узелками

Узелок II. Комнаты со всеми удобствами

«Ступайте прямо по кривому переулку, а потом по замкнутому квадрату».

Спросим у Бальбуса, — сказал Хью.

— Идет! — согласился Ламберт.

— Уж он-то что-нибудь придумает, — добавил Хью.

— Еще как! — воскликнул Ламберт.

Больше не было произнесено ни слова: братья прекрасно понимали друг друга.

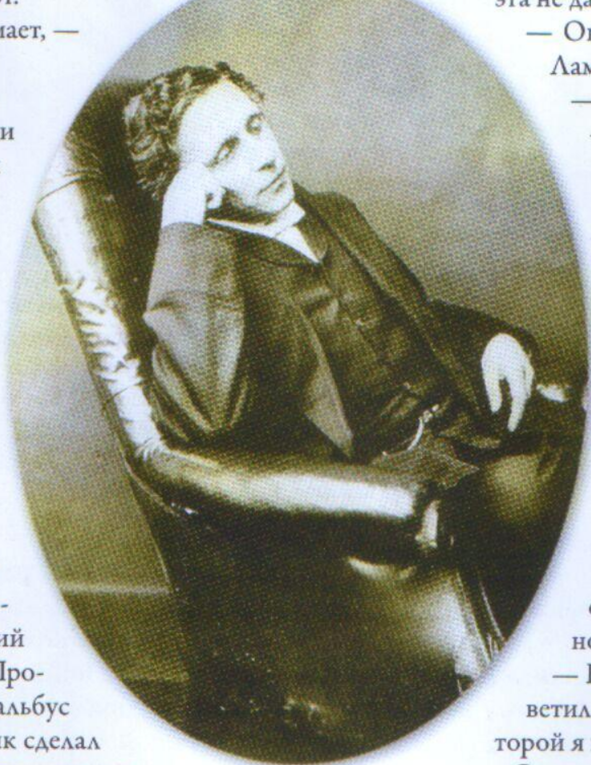
Бальбус ожидал их в гостинице. Дорога, по его словам, была несколько утомительной, поэтому два юных воспитанника и отправились бродить по курортному местечку в поисках пансиона без своего престарелого наставника. Бальбусом братья прозвали его в честь героя одной книги — сборника упражнений по латинскому языку, который им приходилось штудировать. Сборник этот содержал невероятное количество историй о похождениях неутомимого героя. Против истории под названием «Как Бальбус одолел всех своих врагов» наставник сделал на полях пометку: «Доблесть, увенчанная победой». Он был искренне уверен, что подобные сентенции помогут его питомцам извлечь мораль из каждой истории. Порой эти пометки носили назидательный характер, порой — одобрительный, а иногда сводились к одному-единственному слову.

Чем короче была мораль, тем сильнее нравилась она братьям, ибо тем больше места оставалось на полях для иллюстраций.

Вернувшись в гостиницу, мальчики не смогли сообщить своему наставнику ничего утешительного. Модный курорт, по их словам, «кишмя кишел» отдыхающими. Все же на одной площади в форме квадрата они заметили на дверях не менее четырех домов карточки с надписями: «Сдаются комнаты со всеми удобствами».

— Выбор у нас большой, — заметил Хью, взявший на себя роль докладчика.

— Из сказанного тобой этого отнюдь не следует, — возразил Бальбус, поднимаясь с шаткого стульчика. — В каждом доме может сдаваться лишь одна комната, а нам нужны три спальни и гостиная в одном доме, но взглянуть все же не мешает.



▲ *В свою «Историю с узелками» Кэрролл включил несколько самых сложных задач, представив их в виде «узелков», или глав.*

Пристроившись с флангов, братья еле поспевали за своим наставником, который несся по улице. Хью на бегу не переставал бормотать фразу из письма, только что полученного от отца. Фраза эта не давала покоя ни ему, ни Ламберту.

— Он пишет, что его друг — губернатор... Ламберт, как называется то место?

— Кговджни, — подсказал Ламберт.

— Ах да! Так вот. Губернатор этого самого... хочет устроить званый обед в очень тесном кругу и собирается пригласить шурина своего отца, тестя своего брата, брата своего тестя и отца своего шурина. Отец хочет, чтобы мы отгадали, сколько гостей соберется у губернатора.

После легкого замешательства Бальбус наконец спросил:

— А отец не пишет, каких размеров пудинг собираются подавать на обеде? Если объем пудинга разделить на объем порции, которую может съесть один гость, то частное будет как раз равно...

— Нет, о пудинге в письме ни слова, — ответил Хью. — А вот и та самая площадь, о которой я говорил.

С этими словами троица свернула за угол, и взорам запыхавшихся путников открылся вид на площадь, где сдавались комнаты.

— Она и в самом деле квадратная! — восторженно воскликнул Бальбус, оглядевшись. — Потрясающе!

Мальчики озирали площадь с меньшим энтузиазмом.

— Первое объявление об аренде висит на доме № 9, — заметил Ламберт; но заставить сиявшего от счастья Бальбуса заняться делом было непросто.

— Да вы только взгляните! — кричал он. — На каждой стороне по двадцать дверей! Какая симметрия! Просто чудо!

— Мне как, стучать или звонить? — спросил Хью, озадаченно глядя на медную табличку с краткой надписью «ЗВОНИТЬ ТОЖЕ».

— И то и другое, — ответил Бальбус.

— Тут неразборчиво написано, — уклончиво сказал Хью.

— У меня сдается лишь одна комната, джентльмены, — объявила, приветливо улыбаясь, хозяйка дома, — и комната превосходная. Такой уютной задней комнатки вам нигде больше не найти.

— Позвольте посмотреть, — угрюмо прервал хозяйку Бальбус и, войдя вслед за ней, добавил: — Так я и знал! В каждом доме лишь по одной комнате! Вида из окна, разумеется, никакого?

— Наоборот, прекраснейший вид, джентльмены! — возразила хозяйка и, подняв шторы, указала на крохотный огородик на заднем дворе.

— Что это у вас там? — поинтересовался Бальбус. — Капуста? Ну что ж, хоть какая-то зелень!

— Видите ли, сэр, — пояснила хозяйка, — в зеленной лавке овощи бывают несвежими, а здесь все к вашим услугам и высшего качества.

— Окно открывается? — Этот вопрос Бальбус, выбирая квартиру, обычно задавал первым. Следующий вопрос был: — А как у вас с печной тягой?

Получив удовлетворительные ответы, Бальбус заявил, что пока оставляет комнату за собой, и направился с воспитанниками к дому № 25.

Хозяйка этого домовладения держалась неприступно.

— У меня сдается лишь одна комната, — сказала она, — с окнами в сад на заднем дворе.

— Но капуста, надеюсь, в вашем саду растет? — задал наводящий вопрос Бальбус.

— Конечно, сэр! — подтвердила хозяйка. — На зеленную лавку надежда плоха, вот и приходится выращивать капусту самим!

— Капуста необыкновенная, — заметил Бальбус и, задав обычные вопросы, направился со своими питомцами к дому № 52.

— С радостью устроила бы вас всех вместе, — такими словами встретила их тамошняя хозяйка. — Но у меня осталась свободной только одна комната.

— Надеюсь, задняя? — спросил Бальбус. — С видом на капусту?

— Совершенно верно, сэр! — обрадовалась хозяйка. — Мы выращиваем капусту сами. Ведь зеленные лавки...

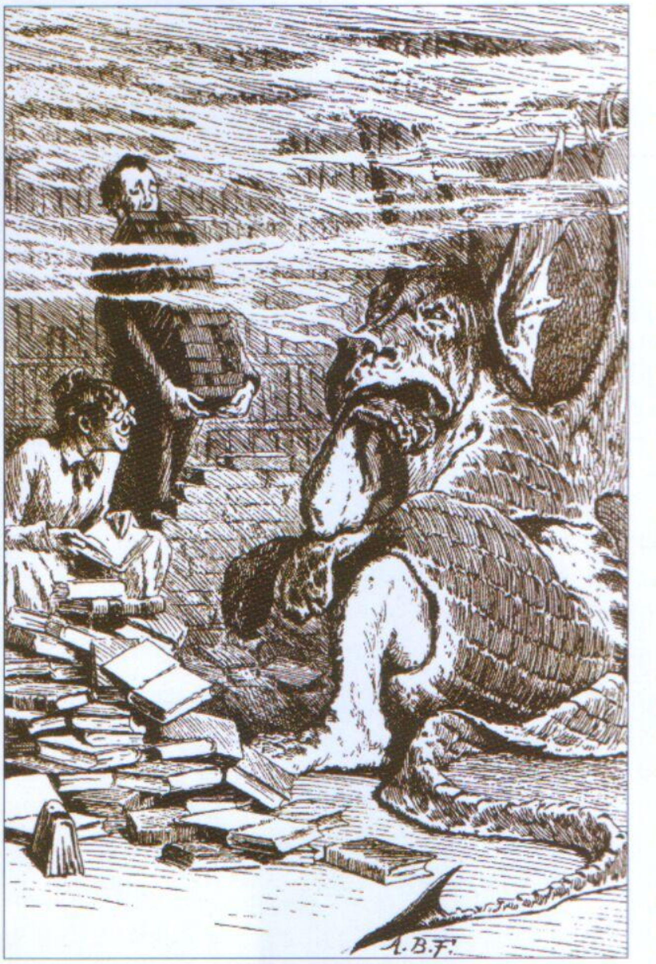
— Очень предусмотрительно с вашей стороны, — прервал ее Бальбус. — Кстати, окно открывается?

На привычные вопросы были даны подробные ответы, однако на этот раз Хью задал вопрос собственного изобретения.

— Скажите, пожалуйста, ваша кошка царапается?

Хозяйка подозрительно оглянулась, словно желая удостовериться, что кошка не подслушивает.

— Не стану обманывать, джентльмены, — сказала она. — Кошка царапается, но лишь в том случае,



▲ *«Как Бальбус помог своей теще убедить дракона»*

если вы потянете ее за хвост. Если ее за хвост не тянуть, — проговорила хозяйка медленно, с видимым усилием припоминая точный текст соглашения, некогда подписанного ею и кошкой, — то она никогда не царапается!

— Многое простительно кошке, с которой обращаются столь неподобающе, — промолвил Бальбус, когда он и оба брата, оставив присевшую в реверансе хозяйку, направились через площадь к дому № 73.

В этом доме они обнаружили лишь маленькую застенчивую девочку-служанку. Показывая им дом, она на все вопросы отвечала:

— Да, мэм!

— Передайте, пожалуйста, своей хозяйке, — сказал Бальбус, — что мы снимем у нее комнату и что ее идея выращивать капусту выше всяких похвал!

— Да, мэм! — сказала девочка и проводила посетителей до выхода.

— Итак, одна гостиная и три спальни! — подвел итоги Бальбус, вернувшись с мальчиками в гостиницу. — Гостиную мы устроим в том доме, до которого ближе всего.

— А как это определить: ходить от двери к двери и считать шаги? — спросил Ламберт.

— Нет, зачем же ходить, когда можно вычислить? Придется вам, мальчики, пораскинуть мозгами, — весело воскликнул Бальбус и, положив перед своими воспитанниками бумагу, перья и чернильницу, вышел из комнаты.

— Вот так задача! Придется поломать голову! — сказал Хью.

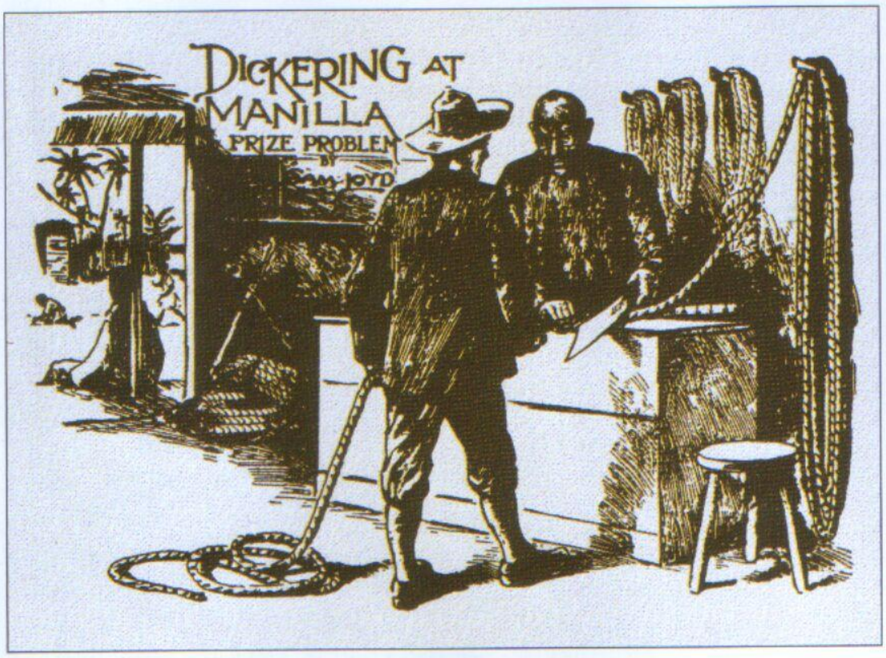
— Еще как! — согласился Ламберт.

Задачи

1. Званый обед у губернатора.
Губернатор Кгобджни дает званый обед в узком кругу и приглашает шурина своего отца, тестя своего брата, брата своего тестя и отца своего шурина. Найти число гостей на этом обеде.
Ответ: Один гость.

2. Комнаты с удобствами.
На каждую сторону квадратной площади выходит по 20 дверей, делящих ее на 21 равную часть. Все двери перенумерованы по кругу, начиная с одной из вершин квадрата. Какая из четырех дверей — № 9, 25, 52 или 73 — отличается тем, что сумма расстояний от нее до трех остальных дверей наименьшая?
Ответ: Дверь № 9.

Загадки торговли



1. Торг в Маниле

Торговля манильской пенькой или канатами — основной бизнес на Филиппинах, и по большей части его контролируют экспортеры — китайцы, которые отправляют корабли с грузом пеньки во все части света. Японские мелкие торговцы славятся своеобразной манерой ведения бизнеса. Особенно своего собственного бизнеса. В отсутствии установленной валюты и фиксированных цен на товар каждая сделка превращается в состязание.

Следующая задача иллюстрирует обычный способ совершения сделки. Опустив простонародный язык, скажем, что китайский моряк заходит в лавку, торгующую канатами, и спрашивает:

— Не могли бы вы подсказать мне хорошую лавку, где можно купить качественный канат?

Лавочник-японец, проглотив скрытое оскорбление, отвечает:

— У меня только лучшие канаты. Но и самые худшие из тех, что у меня есть, наверняка будут лучше тех, которые вы ищете.

— Покажите мне лучшее, что у вас есть! Чтобы мне этого хватило, пока я не найду что-нибудь получше. Сколько вы берете за толстый канат?

— Семь долларов за бухту в сто футов длиной.

— Это слишком много и дорого. Я никогда не плачу больше доллара за хороший канат, а этот весь гнилой.

— Нормальный канат,— отвечает торговец,— показывая на бухте нетронутую печать, гарантирующую длину и качество.— Если у вас мало денег, то возьмите сколько вам нужно по два цента за фут.

— Отрежьте двадцать футов,— говорит моряк и хвастливо вытаскивает золотую пятидолларовую монету, демонстрируя свою платежеспособность.

Торговец с подчеркнуто сосредоточенным выражением лица отмеряет двадцать футов — моряк должен увидеть, как он старается все точно отмерить. Матрос, однако, говорит, что мерило, в котором должен быть один ярд, на самом деле на три дюйма короче, так как разметка прерывается на отметке в тридцать три дюйма. Таким образом, когда канат уже отрезан, моряк показывает на более длинную его часть и говорит: «Я заберу эти 80 футов. Нет, не надо мне посылать, я сам унесу». Затем бросает фальшивую монету в пять долларов, и торговцу приходится идти разменивать ее в соседнюю лавку. Получив свою сдачу, моряк уходит и забирает канат.

Задача состоит в том, чтобы сосчитать, сколько потерял торговец, если предположить, что ему придется заменить фальшивую монету настоящими деньгами и что канат действительно стоит два цента за фут. (Помните, что 1 ярд равен 36 дюймам, а 1 фут — 12 дюймам.)

2. Каков доход?

Один торговец продал велосипед за 50 долларов, затем выкупил его обратно за 40 и выиграл таким образом 10 долларов. Итак, у него есть велосипед и 10 долларов. Затем он снова продает велосипед, но уже за 45 долларов, выиграв еще 5 долларов, в общей сумме — 15.

— Но как же так,— воскликнет бухгалтер,— сначала у человека есть велосипед за 50 долларов и после второй продажи у него только 55 долларов! Каким образом он мог выручить больше пяти? Продажа велосипеда за 50 долларов — это просто обмен, который не предполагает ни доходов, ни расходов, но когда он покупает за 40 и продает за 45, то доход составляет 5 долларов, и это все.

— Я утверждаю,— возразит счетовод,— что когда велосипед продается за 50 долларов, а покупается обратно за 40, то чистый доход получается 10 долларов, потому что это один и тот же велосипед и к нему еще 10 долларов. Но когда он продает его за 45 долларов, то это уже просто обмен, о котором мы говорили, который не подразумевает ни потерь, ни доходов. Но это не влияет на его первый доход, и в итоге получается, что он выручил именно 10 долларов.

Это очень простая задача, и даже ученик первого класса мог бы решить ее в уме. Но тем не менее, у нас получилось три разных варианта ответа! Как вы считаете, какой из них верный?

3. Лавка старьевщика

Описывая посещение лавки старьевщика, Смит рассказал, что потратил там половину своих денег за полчаса таким образом, что у него осталось столько центов, сколько долларов было раньше, и половина долларов от центов, что были раньше. Итак, сколько потратил Смит?

4. Продажа кур

Фермер с женой на рынке хотели обменять живую птицу на скот из расчета, что восемьдесят пять кур равны одной лошади и одной корове. Предположительно, пять лошадей стоят столько же, сколько двенадцать коров.

— Джон,— сказала супруга,— давай возьмем еще столько же лошадей, сколько мы уже выбрали. Тогда у нас будет семнадцать лошадей и коров, которых нужно будет содержать во время зимы.

— Думаю, нам нужны еще коровы,— ответил муж.— Более того, думаю, если мы удвоим количество коров, которых выбрали, то у нас будет 19 голов коров и лошадей и точное число кур для обмена.

Эти простые деревенские жители не знали, что такое алгебра, но, разумеется, знали, сколько кур у них было и какое количество лошадей и коров они могли выручить.

Попросим наших эрудированных читателей, опираясь на данные из вышеизложенного диалога, посчитать, сколько кур привезли на рынок фермер с женой.

5. Алмазы и рубины

Стоит знать, что стоимость одного карата алмаза умножается на вес камня в квадрате, а стоимость карата рубина — на его вес в кубе. Например, если алмаз превосходного качества весом в один карат стоит 100 долларов, то камень весом в два карата будет стоить уже 400 долларов; а камень в три карата, соответственно, 900 долларов. Если качественный восточный рубин весом в один карат стоит 200 долларов, то двухкаратный камешек будет стоить уже 1600 долларов.

Один известный коммерсант, осваивающий алмазные шахты в Бразилии, Капской колонии и в других точках земного шара, показал мне два кольца с бриллиантами, которые обменял на два алмаза разных размеров, а как мы уже знаем, один карат стоит 100 долларов. Могли бы вы отгадать, какого размера были те камни, за которые коммерсант получил два кольца одинаковой формы? Конечно, есть много ответов, а потому мы бы попросили вас вычислить наименьший возможный размер для двух одинаковых камней, эквивалентный стоимости двух камней разного размера, но без необходимости их дробить.

Ответы

1. Первые 18 футов каната, которые отмерил торговец, на 3 дюйма на каждый ярд короче, или всего полтора фута меньше. В двух последних футах ничего не теряется, так как мерило обрезано только с одной стороны. Таким образом, торговец отдает моряку канат длиной в 81 фут с половиной, что по 2 цента за фут составляет 1,63 доллара. Стоимость этого куска получается 1,60 доллара (80 футов по два цента за фут), которые ему оплачивают фальшивой монетой в 5 долларов. Торговец дает моряку сдачу 3,40 доллара. Если мы прибавим эту сумму к 1,63 доллара — потере за канат, то общая потеря составит 5,03 доллара. А то, что сосед поменял ему фальшивые деньги, не имеет отношения ни к его доходам, ни к потерям.

2. Мы не знаем, сколько коммерсант заплатил за велосипед изначально. Так как этот момент неизвестен, то и ответ на данную задачу не может быть однозначным.

3. Смит начал с суммы в 99,98 долларов и потратил 49,99 доллара.

4. В загадке про кур любому фермеру ясно, что корова стоит 25 кур, а лошадь — 60. Фермер и его жена уже выбрали 5 лошадей и 7 коров, чья общая стоимость равна 475 курам. У них остается достаточно кур, чтобы купить еще 7 коров. $7 \times 25 = 175$, и в результате получается 650 кур.

5. Камень каждого кольца имел 5 каратов, потому каждое из них стоило по 2500 долларов, что в сумме равно 5000 долларов за два кольца. Размеры алмазов были в 1 и в 7 каратов (по цене 100 и 4900 долларов соответственно), что в итоге давало сумму, равную 5000 долларов.

Загадки о времени и скорости

1. Который был час?

— Скажите мне, Деванасосус, который час? — как-то раз спросили одного профессора.

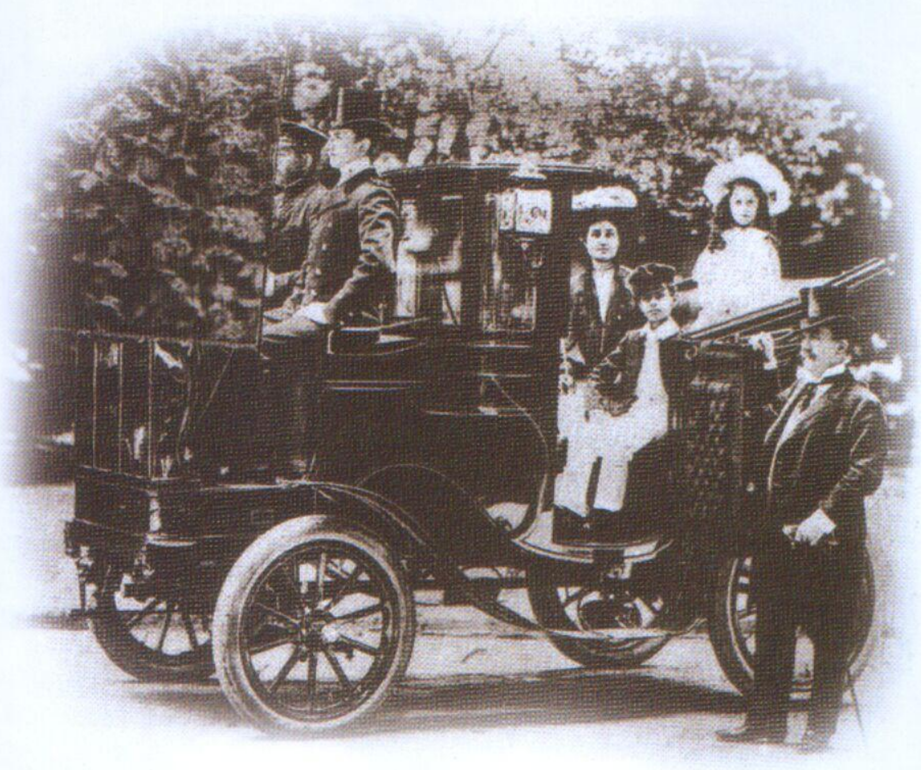
Ответ был действительно любопытным.

— Если ты сложишь четверть времени, прошедшего с полудня до настоящего момента, с половиной времени, которое пройдет с этого момента до полудня завтрашнего дня, у тебя будет точное время.

Сколько было времени?

2. Трое часов

В пятницу 1 апреля 1898 года трое новых часов были выставлены на одно и то же время, 12.00. В полдень следующего дня было обнаружено, что часы A показывали точное время, часы B спешили ровно на одну минуту, а часы C отставали ровно на одну минуту. Итак, предположим, что часы B и C не были отрегулированы и в дальнейшем шли в том же ритме. Вопрос: в какой день и в котором часу трое наручных часов снова укажут одно и то же время, 12.00?



▲ *Какова средняя скорость нашей машины?*

3. Меняясь местами

Часы на рисунке показывают 4 часа и 42 минуты. Стрелки окажутся в той же позиции через 8 часов и 23 минуты. На самом деле, стрелки поменяются местами. Сколько раз стрелки меняют свое положение между тремя часами дня и полуночью? И в указанном временном промежутке: в какое время минутная стрелка будет находиться ближе к точке IX?

4. Средняя скорость

Во время последней поездки на автомобиле мы заметили, что ехали со скоростью 10 миль в час, но на обратном пути по той же дороге мы ехали со скоростью 15 миль в час, так как движение было менее оживленным. Какова была наша средняя скорость? Не торопитесь отвечать этот простой вопрос, так как, скорее всего, вы ошибетесь.

5. Три деревни

Однажды я решил доехать на машине из Акрфилда в Батерфорд, но по ошибке поехал по шоссе, пересекающему Цисбери — населенный пункт, который находится чуть ближе к Акрфилду, чем к Батерфорду, в 12 милях слева от шоссе, по которому я должен был бы ехать. Прибыв в Батерфорд, я обнаружил, что проехал 35 миль. Каковы расстояния между этими поселками, если каждое — целое число в милях? Я должен отметить, что все три шоссе практически прямые.

6. Бег ослов

Однажды на пляже Томми и Евангелина решили организовать бег ослов по песчаной площадке длиной в милю. Господин Добсон и кое-кто из друзей, с которыми они познакомились на пляже, были арбитрами. Но так как ослы оказались знакомы друг с другом и никак не соглашались разлучаться, ничья была неизбежна. Однако арбитры, стоявшие в различных точках площадки, разделенной на четверти мили, отметили следующие результаты: первые три четверти мили были пройдены за 6 и 3/4 минуты, первая половина мили была пройдена за то же время, что и вторая половина, и третья четверть была пройдена за то же время, что и последняя четверть. Несмотря на полученные результаты, сеньор Добсон ради развлечения высчитал, за какое время оба осла прошли полную милю.

А вы можете дать ответ?

Ответы

1. Было 21:36. Четверть времени после полудня — 2 часа и 24 минуты, половина времени до полудня следующего дня — 7 часов и 12 минут. Сумма этих чисел дает нам 9 часов и 36 минут.

2. Арифметические расчеты здесь просты. Чтобы все стрелки одновременно показали 12, нужно, чтобы часы В поспешили, а часы С отстали на 12 часов. Так как В будут спешить на одну минуту через 24 часа, а С отстанут на минуту за тот же период, очевидно, что одни часы будут спешить на 720 минут (12 часов) через 720 дней, а другие отстанут на 720 минут за 720 дней. Поскольку часы А работают безупречно, трое часов одновременно будут показывать 12.00 в полдень на 720 день после 1 апреля 1898 года.

Но какой это будет день?

Я опубликовал эту загадку в 1898 году. Было интересно, многие ли обратят внимание не то, что 1900 год не будет високосным. Меня удивило, сколько людей этого не учли. Каждый год, который можно разделить на четыре без остатка, — високосный, за исключением тех, которые заканчиваются на два нуля. Ни 1800, ни 1900 годы не были високосными. Однако, чтобы календарь лучше согласовался с солнечным годом, один последний год века через каждые четыреста также считают високосным. Следовательно, 2000, 2400, 2800 и 3200 и так далее будут високосными годами. Надеюсь, мои читатели будут здравствовать, чтобы в этом убедиться. Значит, 720 дней с полудня 1 апреля 1898 года — это полдень 22 марта 1900 года.

3. В 36 парах часов стрелки поменяются местами за время между 15:00 и полуночью. Количество пар часов, начиная с любого часа (n) до полуночи, вычисляется сложением 12 – (n + 1) первых целых чисел. В нашей загадке n = 3. Следовательно, 12 – (3 + 1) = 8 и 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36.

Первая пара часов — 3 часа 21 57/143 минуты и 4 часа 16 112/143 минуты, последняя пара — 10 часов 59 85/143 минуты и 11 часов 54 158/143 минуты.

Я не выдам оставшуюся часть 36 пар часов, но представлю формулу, посредством которой могут быть рассчитаны 66 пар — от полудня до полуночи:

a часов × (720b + 60a минут)/143

b часов × (720a + 60b минут)/143

Буква а может быть заменена на любой час от 0 до 10 (где 0 равняется 12 часам дня); b может представлять любой последующий час до а, до 11 часов. Посредством этой формулы без труда находим ответ на второй вопрос: a = 8 и b = 11 дают пару 8 часов 58 106/143 минуты и 11 часов 44 128/143 минуты, и в последнем случае минутная стрелка приблизится к точке IX, так как будет на расстоянии в 15/143 минуты.

Может оказаться поучительным составить таблицу из 66 пар часов, в которых стрелки поменяются местами. Вот легкий способ: сделайте одну колонку для первых часов и вторую колонку для вторых часов пары. Если a = 0 и b = 1 в предыдущих выражениях, мы находим первый случай и помещаем 0 ч 55/143 минут вверху первой колонки таблицы и 1 ч 0 60/143 минут вверху второй колонки. Складывая последовательно 5 5/143 минут в первой и 1 ч 0 60/143 минут во второй колонке, мы получаем 11 пар. Первыми окажутся некоторое количество минут после нуля, то есть после 12 часов дня. Потом будет «скачок» во времени, но мы можем найти следующее значение, если a = 1 и b = 2, и, складывая последовательно эти два показателя, получаем десять пар, следующих за 1. Потом наступает другой «скачок» и снова, посредством сложения, могут быть получены девять пар, следующих после 2 часов. И так до конца. Я позволю своим читателям понять природу и причину «скачков». Таким образом, согласно формуле из первого параграфа этой загадки, мы получаем 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 66 пар часов.

Некоторое время назад директор образовательного учреждения для государственных служащих, который вел колонку в газете, столкнулся со следующим вопросом читателей: «В какое время после 12 часы будут неточны при условии, что обе стрелки одинаковой длины?» Его первый ответ был: «Вскоре после часа». Потом кто-то из читателей убедил его, что ответ — «5 и 5/143 минуты после 12», и он счел его правильным, поскольку именно в обозначенное время — что в 12:05, что в 01:01 — стрелки стоят в одинаковом положении, неважно какая из них принимается за часовую, а какая за минутную.

4. Средняя скорость — 12 миль в час, а не 10,5, как поторопится заявить большинство. Возьмите любое расстояние, к примеру, 60 миль. Это значит шесть часов туда и четыре обратно. Проезд дважды по 120 миль должен занять 10 часов, и средняя скорость будет 12 миль в час.

5. Если вы внимательно посмотрите на первые буквы названий населенных пунктов, то увидите, что три шоссе образуют треугольник ABC с перпендикуляром, равным 12 милям и идущим от вершины С к основанию АВ. Он разделяет наш треугольник на два прямоугольных треугольника с общей стороной, равной 12 милям. Итак, делаем вывод, что дистанция от А до С — 15 миль, от С до В — 20 миль, а от А до В — 25 миль (то есть 9 плюс 16). С этими числами удобно работать, так как 12 в квадрате плюс 9 в квадрате равняется 15 в квадрате, и 12 в квадрате плюс 16 в квадрате равняется 20 в квадрате.

6. Ослы пройдут полную милю за девять минут. Нам недостаточно данных, чтобы определить время, за которое пройдены первая и вторая четверти мили соответственно, но на них вместе понадобилось, конечно, четыре с половиной минуты. Последние две четверти были пройдены за две с четвертью минуты каждая.

• • •

Льюис Кэрролл

Запутанный рассказ

Узел III. Безумная Математильда

«Ждал я поезд».

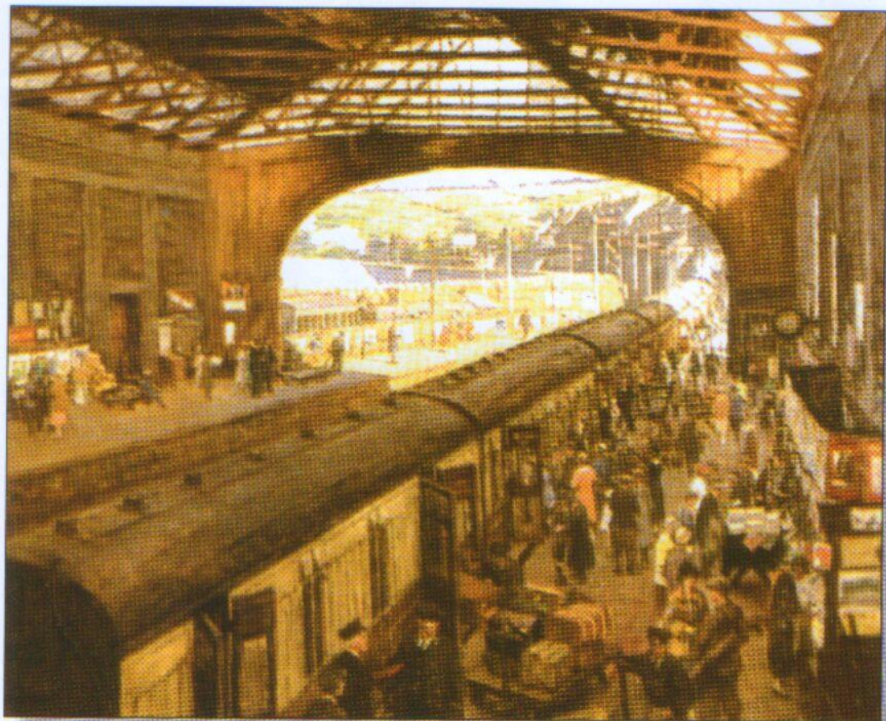
Думаю, я действительно немного сумасшедшая, потому меня и называют безумной, — предположила Математильда в ответ на осторожно заданный Кларой вопрос про прозвище. — Я никогда не делаю того, чего в наши дни ожидают от разумных людей. Во-первых, не ношу платьев с длинными шлейфами. Они напоминают мне составы, тянущиеся за паровозом. (Кстати, о поездах. Вон там находится вокзал Чаринг-Кросс. О нем я потом расскажу тебе кое-что интересное.) Во-вторых, не играю в теннис, в-третьих, не умею жарить омлет. В-четвертых, я даже не смогу наложить шину на сломанную ногу. В общем, перед тобой круглая невежда!

Была пора каникул, Клара приехала погостить к тетушке, и Безумная Математильда показывала ей достопримечательности восьмого чуда света — Лондона.

— Вокзал Чаринг-Кросс! — продолжала она, широким жестом указывая на вход и как бы представляя племянницу старому другу. — Бейсуотерскую и Бирмингемскую ветки только что закончили строить, и теперь поезда могут непрерывно циркулировать по замкнутому маршруту, на западе — до границ Уэльса, на севере — до Йорка, и вдоль восточного побережья назад в Лондон. Расписание поездов немного странновато: поезда, следующие на запад, возвращаются на вокзал через два часа после отправления, а поезда, идущие в восточном направлении, находятся в дороге три часа. Каждые 15 минут с вокзала в противоположных направлениях выезжают два поезда.

— Они расстаются, чтобы встретиться затем вновь, — промолвила Клара, и глаза ее наполнились слезами от столь романтической мысли.

— Не стоит плакать, — сухо заметила тетушка. — Они же встречаются не на одной колее железной дороги. Кстати, о встречах. Мне в голову пришла отличная идея! — воскликнула она, со свойственной ей резкостью меняя тему разговора. — Давай сядем на поезда, идущие в противоположных направлениях, и посмотрим, кто из нас увидит больше встречных составов. Сопровождать тебя не нужно: в этих поездах есть специальные дамские купе. Итак, выбирай, в каком направлении тебе ехать, и мы побьемся об заклад относительно того, кто из нас выиграет!



▲ *«Сядем на поезда, идущие в противоположных направлениях, и посмотрим, кто из нас увидит больше встречных составов».*

— Я постараюсь выбрать направление так, чтобы мне встретилось ровно в полтора раза больше поездов, чем вам, — заметила Клара, быстро производя в уме какие-то подсчеты.

— Это невозможно, если, конечно, ты будешь честно считать встречные поезда, — с присущей ей прямотой возразила Безумная Математильда. — Не забудь, что поезд, который отправляется с вокзала Чаринг-Кросс или прибывает сюда одновременно с твоим, в счет не идет.

Леди купили билеты и прошли на центральную платформу. Безумная Математильда, как всегда, болтала без умолку, Клара молча проверяла в уме вычисления, на которые опирались все ее надежды на выигрыш.

— Пассажиров просят занять места на трамплинах! — прокричал дежурный.

— А для чего трамплины? — испуганно прошептала Клара.

— Чтобы было удобнее садиться в поезд, — с невозмутимым видом человека, не видящего в происходящем ничего особенного, ответила Безумная Математильда. — Знаешь ли, немного найдется людей, которые смогли бы без посторонней помощи сесть в вагон за три секунды, а поезд стоит лишь одну секунду.

Тут раздался свисток, и на станцию с противоположных сторон влетели два состава. Короткая пауза, и оба поезда помчались дальше. Но и за это время несколько сотен пассажиров успели впрыгнуть в вагоны (с точностью попав на свои места) и ровно столько же выскочили на платформу.

Три часа спустя родственницы вновь встретились на платформе вокзала Чаринг-Кросс и сравнили свои подсчеты. Клара со вздохом отвернулась. Юному и чувствительному сердцу нелегко переносить разочарование, и Безумная Математильда поспешила утешить племянницу.

— Попробуем еще раз, — ласково предложила она. — Но правила слегка изменим. Начнем как и в первый раз. Но до тех пор, пока наши поезда не повстречаются, считать встречные составы не будем. Как только увидим друг друга из окон вагонов, скажем: «Один!» — и продолжим счет встречных поездов до тех пор, пока не вернемся на вокзал.

Взгляд Клары просиял.

— Я непременно выиграю, — радостно воскликнула она, — только дайте мне самой выбрать свой поезд.

И снова свисток паровоза, снова ожидающие заняли места на трамплинах, снова живая лавина пассажиров чудом успела заполнить два пронесшихся мимо поезда, снова наши путешественницы в пути.

Каждая из них с нетерпением выглядывала из окна своего вагона, держа наготове платок, чтобы успеть подать сигнал, когда поезда поравняются друг с другом. Рев и свист. Наконец поезда встретились в туннеле, и путешественницы с облегчением вздохнули.

— Один! — сказала про себя Клара. — Второй!.. Три, уф! Звучит почти как триумф! Это знак! На этот раз я непременно выиграю!

Но выиграла ли она?

▶ Льюис Кэрролл часто обращался к этим двум персонажам, Безумной Математильде — эксцентричной викторианской даме — и ее племяннице, живой и непосредственной Кларе. В такой забавной форме писатель излагал свои математические загадки.

Решения

Задачи

1. Два путешественника садятся на поезда, идущие в противоположные стороны по одному и тому же кольцевому маршруту и отправляющиеся в одно и то же время. Составы отходят от станции каждые 15 минут в обоих направлениях. Один поезд возвращается через три часа, второй — через два. Сколько составов встретит каждый из путешественников на своем пути?

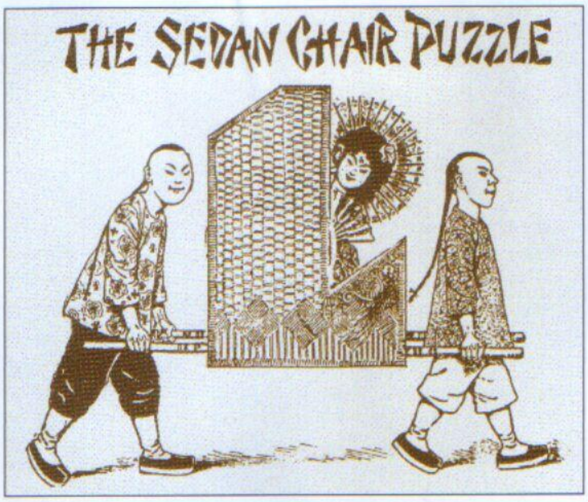
2. Путешественники следуют по тому же маршруту, что и раньше, но начинают считать встречные поезда лишь с момента встречи их поездов. Сколько составов встретится каждому путешественнику?

Ответы

1. 19 поездов.

2. Путешественник, следующий восточным поездом, встретит 12 поездов, второй — восемь. С момента отправления до возвращения в исходный пункт у одних поездов проходит 180 минут, у других — 120. Возьмем наименьшее общее кратное 180 и 120 (оно равно 360) и разделим весь маршрут на 360 частей (будем называть каждую часть просто единицей). Тогда поезда, идущие в одном направлении, будут следовать со скоростью две единицы в минуту, а интервал между ними будет составлять 30 единиц. Поезда, идущие в другом направлении, будут следовать со скоростью три единицы в минуту, а интервал между ними будет равен 45 единицам. В момент отправления восточного поезда расстояние между ним и первым встречным поездом составляет 45 единиц. Восточный поезд проходит 2/5 этого расстояния, встречный — остальные 3/5, после чего они встречаются в 18 единицах от станции отправления. Все последующие составы восточный поезд встречает на расстоянии 18 единиц от места предыдущей встречи. В момент отправления западного поезда первый встречный поезд находится от него на расстоянии 30 единиц. Западный поезд проходит 3/5 этого расстояния, встречный — остальные 2/5, после чего они встречаются на расстоянии 18 единиц от станции отправления. Каждая последующая встреча западного поезда с восточным происходит на расстоянии 18 единиц от места предыдущей встречи. Следовательно, если вдоль всего замкнутого маршрута мы расставим 19 столбов, разделив его тем самым на 20 частей по 18 единиц в каждой, то поезда будут встречаться у каждого столба. Путешественник, едущий на восток, начинает считать поезда после того, как проедет 2/5 всего пути, то есть доедет до восьмого столба, и таким образом успевает сосчитать 12 столбов (или, что то же самое, поездов). Его конкурент насчитает лишь восемь. Встреча их поездов происходит в конце 2/5 от трех часов, или 3/5 от двух часов, то есть спустя 72 минуты после отправления.

Вопрос о пространстве



◄ *Закройте паланкин, разрезав его на минимально возможное количество частей.*

1. Загадка паланкина

«Что касается транспорта в Китае, — вспоминал один писатель, который большую часть жизни провел в Поднебесной, — то там очень скоро привыкаешь передвигаться в паланкине, что гораздо удобнее и быстрее наемного экипажа. Эти паланкины сплетены из ивовых прутьев и напоминают маленькие китайские коробочки из цветной соломки, сделанные так искусно, что невозможно обнаружить места соединения».

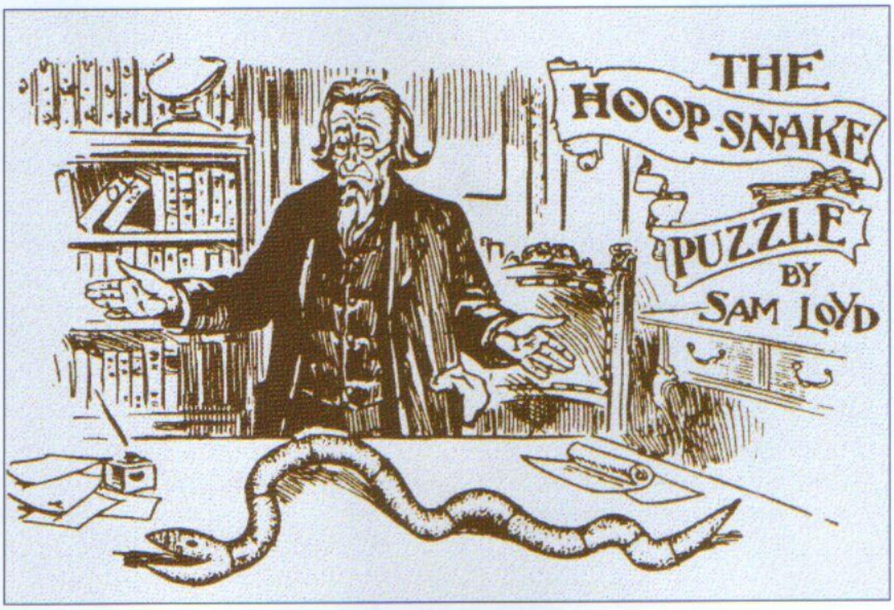
Этот рассказ породил головоломку. Дело в том, что во время дождя паланкины закрываются, причем таким образом, что при самом внимательном изучении не удается найти места соединения отдельных частей. Вам предлагается разрезать изображенный на рисунке паланкин на возможно меньшее количество частей так, чтобы затем, сложив их нужным образом, получить правильный квадрат.

2. Загадка змеи-обруча

Профессор фон Шафскопфен, известный натуралист, был весьма озадачен противоречивыми рассказами о змее-обруче, названной так потому, что она имела обыкновение передвигаться довольно странным образом: взяв в рот конец своего хвоста, она катилась, словно обруч. Эта особенность подотряда Ophidia описана многими натуралистами, а один университетский профессор утверждает, что видел трех змей, образовавших один большой обруч, который пронесся, как молния, и исчез, потому что змеи проглотили друг друга.

Никто не отрицает возможность такого исчезновения, но возникают сомнения относительно самого существования змеи-обруча. Профессор Шафскопфен рыскал по всей стране, пока, наконец, в дебрях Обручевых гор не нашел великолепный экземпляр окаменевшей змеи-обруча с кончиком своего хвоста во рту. Острой пилой профессор распилил змею на 10 частей, бережно переложил их ватой, упаковал и с триумфом привез свою добычу домой. Вот тут-то он и потерпел полный крах в попытках сложить части так, чтобы хвост оказался во рту.

Математики утверждают, что из этих 10 частей можно сложить 362 882 змеи, ни одна из которых не будет представлять собой замкнутый обруч. Это дало повод скептикам поставить 362 882 против одного за то, что такая змея никогда и не существовала!



▲ *Расположите 10 частей так, чтобы змея укусила себя за хвост.*

3. Задача для водопроводчика

Рассмотрим практическую сантехническую задачу, которая может быть любопытна для всех, кто интересуется механикой.

Водопроводчику нужно вычислить минимально возможную стоимость медного чана вместимостью 1 000 кубических дюймов. Медь продается в листах по три квадратных дюйма и стоит один доллар за квадратный дюйм, так что его задача состоит в том, чтобы определить наименьшие размеры прямоугольного чана. Очевидно, что если основание чана равно 10 кв. дюймам, 10 умноженное на 10 равно площади основания 100, и это число, умноженное на глубину, дает нужные нам размеры чана вместимостью 1 000 куб. дюймов.

Куб объемом 10 кв. дюймов вмещает 1 000 куб. дюймов: верно, но потребовалось бы 500 дюймов меди (по 100 на основание и на каждую из сторон). Наша задача — найти наиболее экономичную форму для чана вместимостью 1 000 куб. дюймов, используя наименьшее количество меди.

Это простое вычисление, которое любой механик решает ежедневно, каждый на свой лад, но математики обнаружат здесь явление под названием «удвоение куба».

4. Санитарка Красного Креста

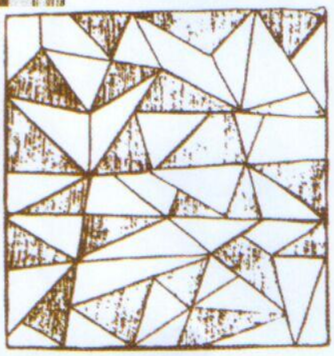
В царстве головоломок нет ничего более занимательного, чем коллекция загадок, связанных с греческим крестом и его соотношением с квадратом, параллелограммом и другими симметричными фигурами. Вместо известной задачки на превращение квадрата в крест с помощью наименьшего числа разрезов мы предлагаем составить два креста из одного.

Рассказывают об одном солдате, который перед тем, как вернуться домой, попросил у сестры милосердия, спасшей ему жизнь, на память крест, который она носила на рукаве. Женщина великодушно извлекла ножницы и разрезала крест на несколько частей, которые можно было соединять, составляя два одинаковых по размеру креста. Эта хитроумная головоломка необычайно проста и привлекательна, и разгадать ее так же приятно, как выиграть приз.

◄ *Разделите греческий крест на наименьшее возможное количество частей, которые можно было бы сложить таким образом, чтобы получить два греческих креста одинакового размера.*

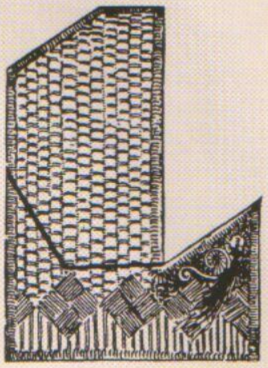
5. Скрытая звезда

Найдите правильную пятиконечную звезду на рисунке справа.



Решения

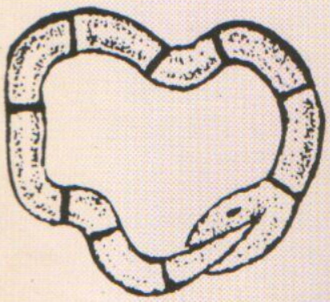
1. Это первая головоломка из коллекции задач на «рассечение». Читателю наверняка будет интересно узнать: немецкий математик Давид Гильберт продемонстрировал, что многоугольник можно разрезать на конечное число частей, из которых повторно можно сложить другой многоугольник равной площади. Однако эти рассечения не очень занимательны, если число частей недостаточно велико для того, чтобы решение было элегантным и неожиданным.



Почти все простые и правильные многоугольники (кроме разве что пентаграммы, то есть пятиконечной звезды, с которой все несколько сложнее) используются в задачах на рассечение, требующих большой изобретательности.

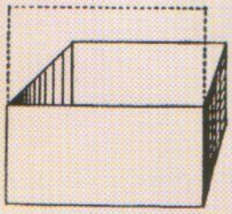
Говоря о «теории рассечений», мы рекомендуем серию статей группы преподавателей математики Университетского колледжа Чикаго, опубликованных в «Мэтимэтикс тичер»: номера за май, октябрь и декабрь 1956 года и за февраль и май 1957 года.

2.



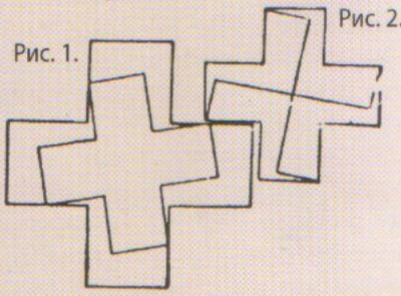
3. В задаче про водопроводчика наиболее экономичным окажется бак с квадратным основанием. Ширина должна быть в два раза больше глубины. Если один куб приблизительно 12,6 кв. дюймов содержит 2000 куб. дюймов, то половина этой глубины даст требуемые 1000 куб. дюймов.

(Точные размеры чана не могут быть рассмотрены в рациональных числах,

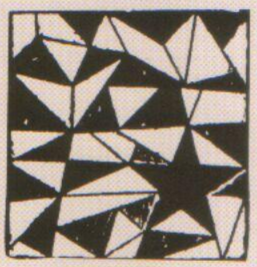


потому что в этом случае мы столкнемся с половиной «удвоенного куба». Выразив их в иррациональных числах, мы можем говорить о том, что у чана были бы длина и ширина, равные кубическому корню из 2000, и глубина, равная половине кубического корня из 2000).

4. Следующая иллюстрация показывает, как можно разрезать греческий крест на пять частей и как эти части могут соединяться, образуя два креста одинакового размера. Разрежьте крест как показано на рис. 1, а затем сложите части так, как показано на рис. 2.



5.



Лучшее от Генри Э. Дьюдени

Арифметические и алгебраические задачи

Вкус жизни заключается в разнообразии.
У. Купер. «Работа»

▲ *Сколько женщин сделали предложение в прошлом високосном году?*

1. Дамы високосного года

В последний високосный год дамы не теряли времени и вовсю пользовались своей привилегией предложить кому-либо руку и сердце. Если цифры, попавшие ко мне из конфиденциального источника, верны, то следующие данные показывают положение дел в нашей стране. Неустановленное число женщин сделали предложение каждая по одному разу, среди них каждая восьмая была вдовой. Среди мужчин одиннадцатая часть были вдовцами. Из предложений, сделанных вдовцам, пятая часть была отвергнута. Все вдовы получили положительные ответы. 35/44 вдов вышли замуж за холостяков. 1221 старая дева была отвергнута холостяками. Количество старых дев, на которых согласились жениться холостяки, в семь раз превышало количество вдов, на которых женились холостяки. И это все детали, которые мне удалось разузнать. Теперь скажите, сколько женщин делали предложение?

2. Мистер Губбинс в тумане

Мистер Губбинс, добросовестный предприниматель, терпел большие убытки по вине лондонского тумана. Электрический свет не работал, и господину Губбинсу пришлось обходиться двумя свечами. Секретарь убедил его, что хотя обе свечи долгого горения, но одна из них будет гореть четыре часа, а вторая — пять. Поработав некоторое время, Губбинс погасил свечи, поскольку туман рассеялся, и с удивлением обнаружил, что огарок одной свечи в четыре раза больше, чем огарок второй. Вернувшись домой, господин Губбинс, любитель хороших загадок, сказал себе: «Действительно, можно ли вычислить, сколько времени горели сегодня эти две свечи? Попробую». Но вскорости он заблудился в подсчетах еще сильнее, чем в тот день в тумане. Могли бы вы помочь ему в решении этой задачи? Сколько времени горели обе свечи?

3. Выборы в Беренхенале

На последних парламентских выборах в Беренхенале всего было получено 5473 голосов. Либералы были выбраны большинством, набрав на 18 голосов больше, чем консерваторы, на 146 больше независимых кандидатов и на 575 больше социалистов.

Можете ли вы сформулировать простое правило, чтобы рассчитать, сколько голосов получил каждый кандидат?

4. Разделенное наследство

Один человек завещал своим троим сыновьям, Альфреду, Бенджамину и Чарльзу, поделить 100 акров земли в пропорции треть, четверть и одна пятая соответственно. Но Чарльз умер. Как должны разделить земли Альфред и Бенджамин?

5. Маленькая потеря Деванасесоса

Профессор Деванасесос проводил вечер в кругу своих старых друзей, супругов Потт, за игрой в карты (хотя он так и не рассказал мне, какую именно игру они выбрали). Профессор проиграл первую партию и в итоге удвоил ставку, которую сделали супруги Потт. Миссис Потт проиграла вторую партию и удвоила ставки, которые сделали ее муж и профессора. Неожиданно мистер Потт проиграл третью партию и был вынужден удвоить ставки своей жены и профессора. Вскоре выяснилось, что каждый из них имеет одинаковую сумму денег, а профессор за время игры потерял пять шиллингов.

Теперь профессор спрашивает, сколько денег у него было, когда он только садился играть. Вы сможете ответить?

6. Качалка

Нужда — мать изобретательности. Как-то раз я развлекался, наблюдая за ребенком, которому хотелось покататься на качалке на площадке. Не найдя никого, кто мог бы разделить с ним развлечение, он отыскал несколько кирпичей и сложил их на противоположное сиденье на доске, чтобы имитировать вес второго качающегося. Один конец доски был длиннее другого, и мальчик удерживал равновесие супротив 16 кирпичей, когда клал их на короткий конец качелей. Но когда он водружал их на длинную сторону, ему хватало всего 11. Итак, сколько весил мальчик, если мы знаем, что вес кирпича равен 3/4 веса кирпича плюс 3/4 фунта?

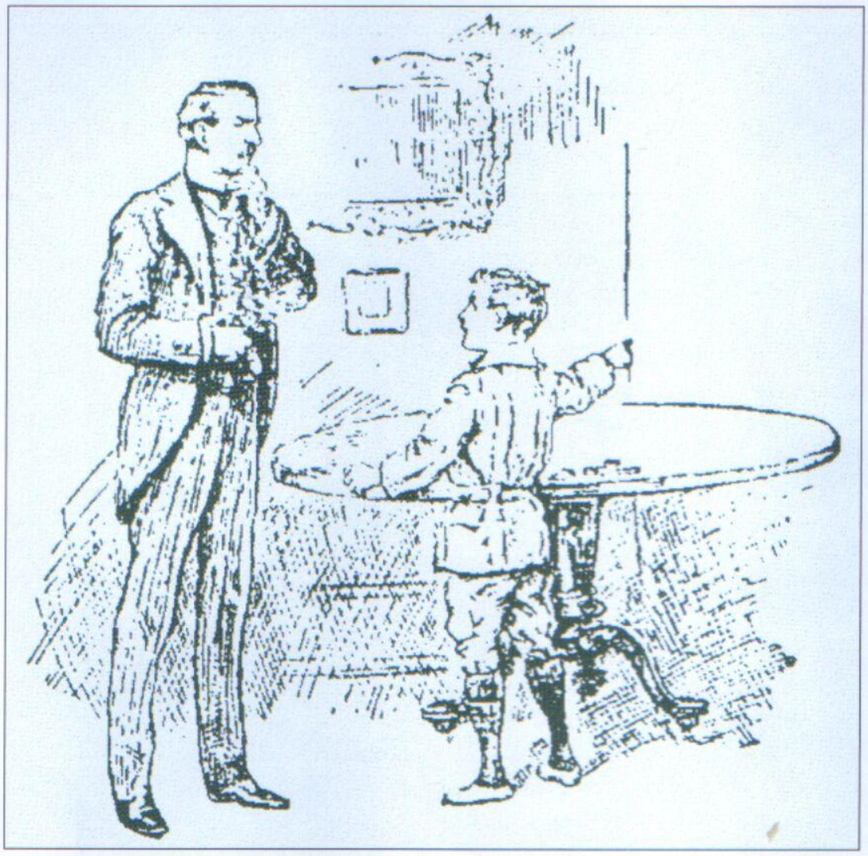
7. Пятно на столе

Ребенок, только что пришедший из школы, захотел продемонстрировать отцу свою находчивость. Он передвинул большой круглый стол в угол комнаты, как показано на рисунке, таким образом, чтобы он касался обеих стен, затем показал на пятно от краски с краю стола.

— У меня есть для тебя маленькая загадка, отец! — сказал молодой человек. — Это пятно находится в восьми дюймах от одной стены и в девяти дюймах от другой. Можешь ли ты назвать диаметр стола, не измеряя его?

Потом слышали, как мальчик говорил своему другу: «Мой отец не смог решить задачу»; но известно, что отец рассказывал какому-то приятелю в Сити, что в уме он назвал цифру почти моментально. Я часто себя спрашиваю: и кто из них говорит правду?

▼*Можете назвать диаметр стола, не замеряя его?*



Решения

1. Единственный правильный ответ таков: 11 616 дам сделали предложение. Здесь есть все детали, и читатель может сопоставить их с нашей задачей. Из 10 164 старых дев 8085 вышли замуж за холостяков, 627 — за вдовцов, 1221 были отвергнуты холостяками, а 231 — вдовцами. Из 1452 вдов 1155 вышли замуж за холостяков, а 297 — за вдовцов. Ни одна вдова не была отвергнута. Задачка не сложна, надо только правильно ее сформулировать.

2. Свечи горели в течение трех часов и 45 минут. Одной свече оставалась шестнадцатая часть от ее длины, а другой — 4/16.

3. Общее количество голосов, набранных, соответственно, либералами, консерваторами, независимыми кандидатами и социалистами, было следующее: 1553, 1535, 1407 и 978. Чтобы узнать, сколько голосов заработали либералы, нужно было всего лишь сложить все три разницы (739) и общее количество голосов (5473), что дает 6212, и разделить на четыре, что дает 1553. Количество голосов за другие партии можно найти на основании этого числа.

4. Так как доля Чарльза делится на момент его смерти, то нам надо только разделить 100 акров между Альфредом и Бенджамином в пропорции 1/3 к 1/4, то есть в пропорции 4/12 к 3/12, или 4/3. Итак, Альфред забирает 4/7 земли, а Бенджамин — 3/7.

5. Профессор начал играть с 13 шиллингами, мистер Потт — с четырьмя шиллингами, а миссис Потт — с семью шиллингами.

6. Ребенок весил 39,79 фунтов. Кирпич весил три фунта. Таким образом, 16 кирпичей весили 48 фунтов, а 11 кирпичей — 33 фунта. Чтобы получить вес, надо умножить 48 на 33, а затем вычислить квадратный корень.

7. Студент рассмотрит эту задачу как квадратное уравнение. Удваиваем произведение двух расстояний относительно стены. Это дает нам 144, что есть квадрат из 12. Сумма двух расстояний равна 17. Если мы сложим и отнимем эти два числа, 12 и 17, то у нас будут два ответа: 29 или 5 соответственно, которые соответствуют радиусу, или половине диаметра стола. Значит, полный диаметр — 58 или 10 дюймов. Но стол размером 10 дюймов (25,4 см) — это абсурд, не соответствующий иллюстрации. Следовательно, стол был 58 дюймов в диаметре. В этом случае пятно было на бортике, ближайшем к углу комнаты, на который и указывал мальчик. Если бы мы допустили другой ответ, тогда пятно находилось бы на дальнем краю стола, удаленном от угла комнаты.

• • •

Льюис Кэрролл

Запутанный рассказ

Узел IV. Искусство счисления

«И снились мне ночью мешки золота».

В нескольких градусах от экватора в полдень даже в открытом море жара стоит совершенно невыносимая, и два путешественника облачились в легкие ослепительно белые полотняные костюмы. Оба туриста возвращались теперь домой на небольшом парусном судне, совершавшем раз в месяц рейсы между двумя самыми крупными портами того острова, который они столь успешно исследовали.

Растянувшись на груде подушек под сенью огромного зонтика, они лениво наблюдали за несколькими рыбаками-туземцами, севшими на корабль во время последней стоянки. Поднимаясь на борт, каждый из рыбаков нес на плече небольшой, но тяжелый мешок. На палубе стояли огромные весы, на которых при погрузке обычно взвешивали принимаемые на борт грузы. Вокруг этих весов и собрались рыбаки. Возбужденно крича что-то на непонятном языке, они, по-видимому, намеревались взвесить свои мешки.

— Больше похоже на воробьиное чириканье, чем на человеческую речь, — заметил пожилой турист, обращаясь к сыну, который лишь слабо улыбнулся, не найдя в себе сил произнести хоть слово в ответ. Отец в поисках более отзывчивого слушателя обратил свой взор к капитану.

— Что там у них в мешках, капитан? — спросил он, когда упомянутый персонаж поравнялся с ними в своем неспешном бесконечном променаде с одного конца палубы на другой. Капитан прервал свой марш и, высокий, строгий, весьма довольный собой, замер перед туристами, возвышаясь над ними, подобно величественному монументу.

— Рыбаки, — пояснил он, — частые пассажиры на моем судне. Эти пятеро из Мхрукси, места нашей последней стоянки. В мешках они везут деньги. Нужно сказать, джентльмены, что деньги этого острова тяжеловесны, но, как вы догадываетесь, малоценны. Мы покупаем их у туземцев на вес — по пять шиллингов за фунт. Думаю, что все мешки, которые вы видите, можно купить за одну десятифунтовую банкноту.

Слушая капитана, пожилой джентльмен закрыл глаза — несомненно, лишь для того, чтобы как можно лучше сосредоточиться на сообщаемых ему интересных фактах, но капитан, не поняв истинных намерений своего собеседника, возобновил прерванный было променад.

Между тем рыбаки, собравшиеся у весов, стали шуметь так отчаянно, что один из матросов счел нелишним принять меры предосторожности и унести все гири. Туземцам волей-неволей пришлось довольствоваться ручками от лебедок, кофель-нагелями и тому подобными тяжелыми предметами, которые им удалось отыскать. Предпринятый матросом демарш возымел желаемое действие: шум вскоре прекратился. Тщательно спрятав мешки в складках кливера, лежавшего на палубе невдалеке от наших туристов, рыбаки разбрелись кто куда. Когда снова послышалась тяжелая поступь капитана, молодой человек приподнялся.

— Как вы назвали место, откуда эти туземцы, капитан? — поинтересовался он.

— Мхрукси, сэр.

— А как называется то место, куда мы направляемся?

Капитан набрал побольше воздуха в легкие, храбро нырнул в слово и с честью вынырнул из его глубин:

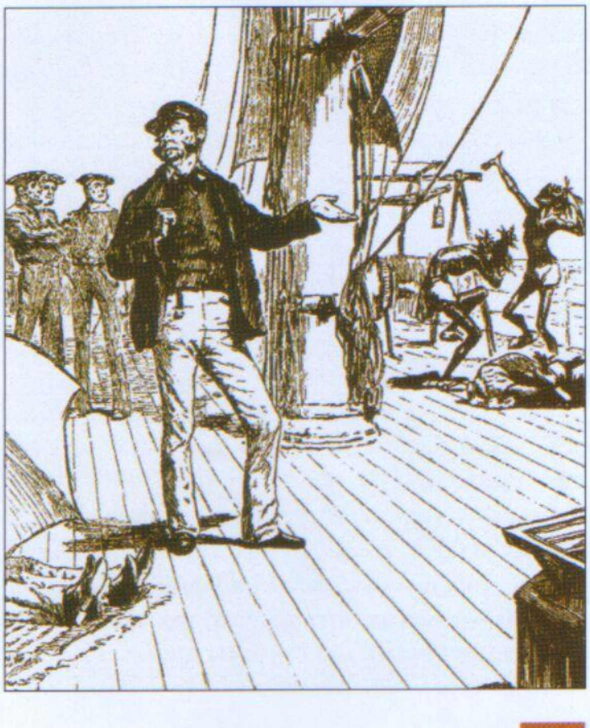
— Они называют его Кговджни, сэр!

— Кг... Не могу выговорить! — еле слышно отозвался молодой человек. Совершенно обессилев, он вновь молча откинулся на подушки.

Отец вежливо попытался заменить сына в разговоре.

— Где мы сейчас находимся, капитан? — любезно осведомился он. — Имеете ли вы об этом хоть какое-нибудь представление?

Капитан бросил презрительный взгляд на погрязшую в невежестве «сухопутную крысу» и от-



► *Капитан прервал свой марш и, высокий, строгий, весьма довольный собой, замер перед туристами, возвышаясь над ними подобно величественному монументу.*

ветил тоном, преисполненным глубочайшего снисхождения:

— Я могу сообщить вам наши координаты, сэр, с точностью до дюйма!

— Не может быть! — лениво удивился пожилой турист.

— Не только может, но так оно и есть! — настаивал капитан. — Как вы думаете, что бы стало с моим судном, если бы я потерял долготу и широту? Имеет ли кто-нибудь из присутствующих хотя бы отдаленное представление о счислении?

— С уверенностью могу сказать: никто из присутствующих в счислении не смыслит, — откровенно признался сын; однако он несколько переусердствовал в своем правдолюбии.

— А между тем для тех, кто разбирается в подобных вещах, в счислении нет ничего сложного, — тоном оскорбленного достоинства заявил капитан. С этими словами он удалился, чтобы отдать необходимые распоряжения матросам, собиравшимся поднять кливер.

Наши туристы с таким интересом наблюдали за поднятием паруса, что ни один из них даже не вспомнил о мешках с туземными деньгами, спрятанных в его складках. В следующий момент ветер наполнил поднятый кливер, и все пять мешков, оказавшись за бортом, с тяжелым плеском упали в море.

Несчастным рыбакам забыть о своей собственности было не так просто. Они сгрудились у борта и с яростными криками, размахивая руками, указывали то на море, то на матросов, явившихся причиной несчастья.

Пожилой турист объяснил капитану, в чем дело.

— Позвольте мне возместить несчастным убытки, — добавил он в заключение. — Полагаю, что десяти фунтов будет достаточно? Ведь вы, кажется, называли именно эту сумму?

Но капитан отверг предложение.

— Нет, сэр! — сказал он с величественным видом. — Надеюсь, вы меня извините, но это — мои пассажиры. Происшествие случилось на борту вверенного мне судна и вследствие отданных мной приказаний. Поэтому и компенсацию за причиненный ущерб должен выплатить я.

И он обратился к разгневанным рыбакам на мхруксийском диалекте.

— Подойдите сюда и скажите, сколько весил каждый мешок. Я видел, как вы только что их взвешивали.

Не успел капитан закончить свою речь, как на палубе вновь началось воистину вавилонское столпотворение: все пятеро туземцев наперебой пытались объяснить капитану, что матрос унес гири и им пришлось взвешивать, пользуясь лишь «подручными средствами».

Под наблюдением капитана импровизированные гири — два железных кофель-нагеля, три блока, шесть камней для чистки палубы, четыре ручки от лебедок и большой молот — были тщательно взвешены. Результаты взвешивания капитан аккуратно занес в свой блокнот. Однако на этом его неприятности не закончились. В последовавшей довольно жаркой дискуссии приняли участие и матросы, и пятеро туземцев. Наконец, капитан с несколько растерянным видом подошел к нашим туристам, пытаясь легким смешком скрыть замешательство.

— Возникло нелепое затруднение, — сказал он. — Может быть, вы, джентльмены, подскажете выход из него. Дело в том, что туземцы, как я сейчас выяснил, взвешивали не по одному, а по два мешка!

— Если они произвели менее пяти взвешиваний, то, разумеется, оценить стоимость содержимого каждого мешка не представляется возможным, — поспешил вывести заключение молодой человек.

— Послушаем лучше, что известно о весе мешков, — осторожно заметил его отец.

— Туземцы произвели пять взвешиваний, — сообщил капитан. — Но у меня, — добавил он, поддавшись внезапному приступу откровенности, — просто голова идет кругом. Послушайте, что получилось. Первый и второй мешки весили 12 фунтов, второй и третий — 13,5 фунта, третий и четвертый — 11,5, четвертый и пятый — 8 фунтов. После этого, по утверждению туземцев, у них остался только тяжелый молот. Чтобы уравновесить его, понадобилось три мешка: первый, третий и пятый. Вместе они весят 16 фунтов. Вот так, джентльмены! Приходилось ли вам слышать что-либо подобное?

Решение

Задача

Имеются пять мешков. Первый и пятый мешки вместе весят 12 фунтов, второй и третий — 13 ½ фунтов, третий и четвертый — 11 ½ фунтов, четвертый и пятый — 8 фунтов, первый, третий и пятый — 16 фунтов. Требуется узнать, сколько весит каждый мешок.

Ответ

5 ½, 6 ½, 7, 4 ½ и 3 ½.

Сумма результатов всех пяти взвешиваний равна 61 фунту, при этом вес третьего мешка входит в 61 фунт трижды, а вес всех остальных мешков лишь дважды. Вычитая из 61 фунта удвоенную сумму результатов первого и четвертого взвешиваний, получаем, что утроенный вес третьего мешка равен 21 фунту. Следовательно, третий мешок весит 7 фунтов.

Из результатов второго и третьего взвешиваний (с учетом того, что вес третьего мешка нам уже известен) находим вес второго и четвертого мешков: второй мешок весит 6 ½ фунтов, четвертый — 4 ½.

Наконец, из результатов первого и четвертого взвешиваний получаем для первого и пятого мешков 5 ½ фунтов и 3 ½ фунта.

(Пер. Ю. А. Данилова, публикуется с сокращениями.)

Человеческие задачки

1. Заболевший племянник

Вот небольшая задачка о родстве, ответ на которую очень любопытен. Дядя Рубен поехал в большой город повидать свою сестру Мэри Энн. Они вместе прогуливались по улице, когда увидели небольшой отель. «Прежде чем попрощаться, — сказал Рубен своей сестре, — мне бы хотелось остановиться ненадолго и справиться о своем больном племяннике, который живет в этом отеле».

«Хорошо — ответила Мэри Энн, — так как у меня нет никакого больного племянника, о котором я должна беспокоиться, то пойду домой. Мы можем продолжить нашу прогулку после обеда».

Какое отношение имеет Мэри Энн к этому загадочному племяннику?

2. Человек с мотыгой

Следующая задачка очень проста, она лишена математических сложностей, и я даже сомневаюсь, загадывать ли ее вам. Без сомнения, как в поэме Эдвина Маркхама, она дает пищу для интересных рассуждений.

За пять долларов Хоббс и Ноббс согласились засадить картофельное поле фермера Шоббса. Ноббс может засеять одну грядку картофеля за 40 минут и засыпать борозду с такой же скоростью. Хоббс, в свою очередь, может засеять грядку картошки всего лишь за 20 минут, но за то время, пока он засыпает две борозды, Ноббс засыпает три. Предположим, что оба мужчины работают непрерывно каждый на своей борозде, пока не засеют все поле, и, как видно на иллюстрации, на поле 12 грядок. Как поделить пять долларов, чтобы каждый из трудяг получил вознаграждение в соответствии с выполненной работой?

▲ *Отгадайте, как поделили выручку эти двое работяг.*

3. Полковник, который играл в шахматы

Во время поездки в Санкт-Петербург я познакомился с Чигоринским — русским шахматистом, который рассказал мне, что с началом русско-японских военных действий его назначили командиром армейского подразделения, состоящего из 20 полков непрерывно пополняющегося состава. Каждую неделю добавлялось по 100 человек в каждый полк. В последний день каждой недели полк, насчитывающий наибольшее количество солдат, отправлялся на фронт. Получилось так, что в момент, когда первый полк насчитывал 1000 человек, второй — 950, а третий — 900, и так последовательно на 50 меньше в каждом вплоть до двадцатого полка, где было всего лишь 50 человек, генерал Чигоринский узнал, что полковник пятого полка (где было 800 человек) был хорошим игроком в шахматы. Итак, чтобы предотвратить его отправку на фронт, что должно было произойти пятью неделями позже, генерал прибавлял в тот полк еженедельно по 30 человек вместо 100, как во все другие полки. Учитывая, что таких полков было 20, можете ли вы сказать, сколько недель прошло до того момента, как полковник-шахматист все-таки был отправлен на фронт?

4. Полицейский математик

«Хорошего вам дня, офицер, — сказал господин МакГуайр. — Вы не могли бы мне сказать, который час?». «Я могу это сказать абсолютно точно, — ответил агент Клэнси, который был любителем математики, — прибавьте четверть времени между полуночью и временем сейчас к половине времени между сейчас и полуночью, и вы узнаете, который час». Можете ли вы подсчитать, сколько времени было, когда происходила эта интригующая беседа?

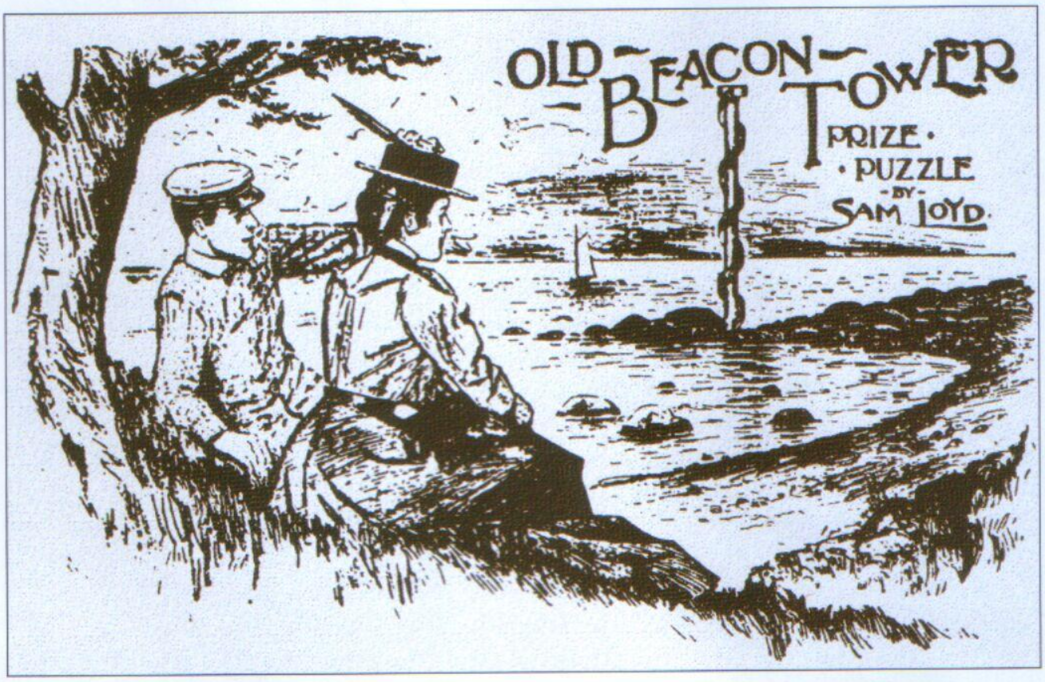
5. Старый маяк

Туристы, которые решили провести летний отпуск на побережье Джерси, смотрят на старый маяк Бикон в Пойнт-Лукаут. Прослуживший более половины столетия маяк находится на последней стадии разрушения.

Данная иллюстрация была сделана с эскиза, которому более 50 лет, а предоставил нам его 96-летний местный житель.

Он вспоминает, что башню построили во времена его детства. Все жители очень гордились такой постройкой, и лишь немногие сомневались, что эта башня не ниже Вавилонской. Сейчас от башни осталась лишь полуразрушенная колонна 60 футов в высоту, а лестница сгорела при пожаре более 20 лет назад. Раньше высота башни составляла 300 футов — эта цифра зафиксирована в официальных документах.

В течение более одного века при упоминании высокого здания в Нью-Йорке использовали поговорку: «Так же высок, как шпиль Церкви Троицы». Но времена изменились, и вот уже капеллан церкви жалуется на то, что на шпиль колокольни падает мусор из соседних офисных зданий. Центральным основанием маяка являлись гигантские мастерски смонтированные колонны, вокруг которых обвивалась лестница с железной балюстрадой и перилами. Эти перила опоясывали колонну четырежды (как показано на картинке). Каждая ступень имела опору, а так как опоры имели дистанцию в один фут, то определить количество ступеней не составляет никакого труда. Однако, со слов капитана Хаффа, предоставившего нам иллюстрацию и историю этой башни, «не было ни одного человека из тех, кто приезжал сюда на лето, кто бы смог правильно сосчитать ступени». Итак, резюмируем полученную информацию: башня имела 300 футов в высоту от первой до последней ступени, металлические перила четырежды опоясывали башню и опоры, одну на каждую ступеньку, на расстоянии один фут. Сюда стоит добавить диаметр всей башни (то есть мнимого цилиндра оси винта), равный 23 футам и 10,5 дюймам. (Напомним, что в одном футе 12 дюймов). Сколько ступеней в винтовой лестнице?



▲ *Сколько ступенек в старой башне?*

Решения

1. Мэри Энн являлась матерью больного мальчика.

2. Если Ноббс может посадить грядку картофеля за 40 минут, то чтобы засадить все шесть грядок, ему понадобится 240 минут. Так как он закрывает их с такой же скоростью, то чтобы закончить свою часть, ему потребуется 480 минут, или 8 часов. Хоббс, работая на других шести грядках, засадил бы их за 120 минут (одна каждые 20 минут), а чтобы закрыть их — еще 360 минут, то есть всего 480 минут, что равно 8 часам. Каждый из мужчин выполнит одинаковую работу за 8 часов. Таким образом, каждому из работников причитается по два с половиной доллара.

3. Пятый полк игрока в шахматы перегонит все остальные 19 по численности солдат, их станет 1370 человек. Будет необходимо 18 недель, прибавляя понедельно по 30 человек, чтобы количество солдат в этом полку превысило 1900 необходимых для отправки на фронт человек; таким образом, правильный ответ — 37 недель и 1910 человек.

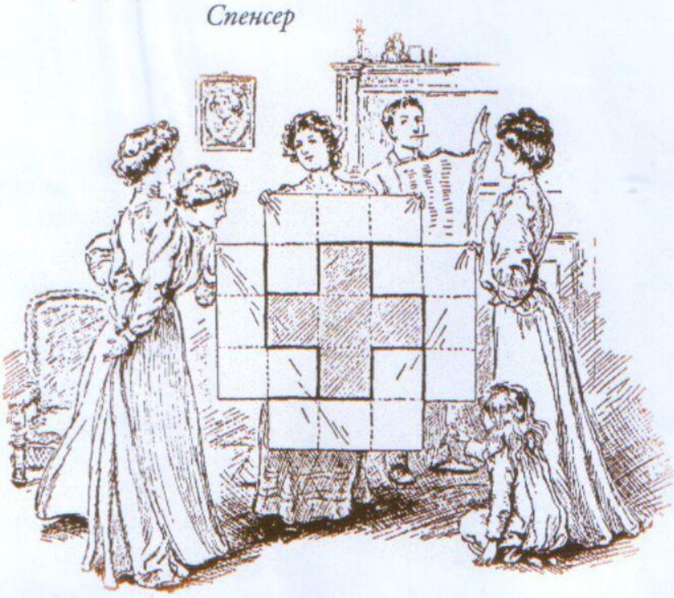
4. Разговор проходил в 9 часов 36 минут, потому как четверть времени, прошедшего с полуночи — 2 часа 24 минуты. Прибавив эти цифры к половине времени, оставшегося до полуночи (7 часов 12 минут), получим 9 часов 36 минут. Если бы МакГуайр не уточнил, что разговор происходит утром, тогда правильным ответом можно было бы считать и 7 часов 12 минут вечера.

5. Если нарисовать диагональ на прямоугольном листе и затем свернуть лист в форму цилиндра, то диагональ превратится в спираль вокруг этого цилиндра. Другими словами, спираль, опоясывающую колонну, можно рассматривать в качестве гипотенузы прямоугольного треугольника. В нашем случае это прямоугольный треугольник, четырежды опоясывающий колонну. Основа этого треугольника в четыре раза больше окружности цилиндра (π на диаметр на четыре), чья сумма чуть больше 300 футов. Это также и высота башни, что является совпадением, потому как высота абсолютно не вовлечена в решение нашей задачи. Также не надо учитывать длину лестницы. Ведь если ступени расположены на расстоянии один фут и находятся в основании прямоугольного треугольника, то такое же число даст и разделение по гипотенузе вне зависимости от длины. Так как основание нашего прямоугольного треугольника равно 300 футам, то и ступеней в винтовой лестнице тоже 300.

Лучшее от Генри Э. Дьюдени

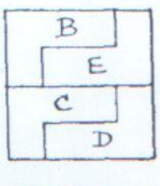
Головоломки на рассечение

«Терзать твою душу крестами».
Спенсер



1. Шелковое одеяло

Дамы из семьи Уилкинсон в качестве рождественского подарка сшили простое одеяло из шелковых лоскутов, состоящее из одинаковых квадратов, как на иллюстрации. До полного завершения ему не хватило четырех лоскутов по углам. Кто-то заметил, что если из центра вырезать греческий крест, а затем сделать разрезы по темным швам, то четыре части, каждая одинаковой формы и размера, смогут сформировать нужный квадрат.



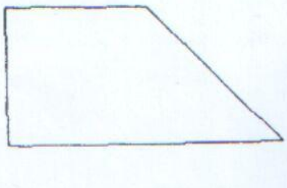
Но затем Джордж Уилкинсон придумал другую задачу.

— Вместо того чтобы извлекать крест полностью, — сказал он, — и формировать квадрат из четырех одинаковых частей, можете ли вы разрезать одеяло на один целый квадрат и еще четыре одинаковые части, которые образуют совершенный греческий крест?

На самом деле эта головоломка очень проста.

2. Легкая головоломка на рассечение

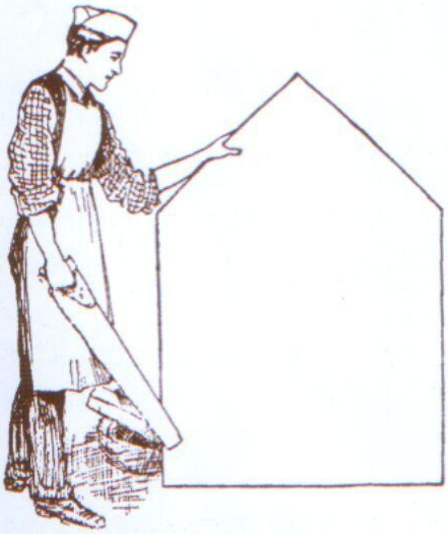
Разрежьте лист бумаги или картона таким образом, как это показано на иллюстрации справа. Вы сразу увидите, что пропорции соответствуют квадрату, присоединенному к середине другого такого же квадрата, только разделенного диагональю. Головоломка заключается в том, чтобы разрезать фигуру на четыре части одинаковой формы и размера.



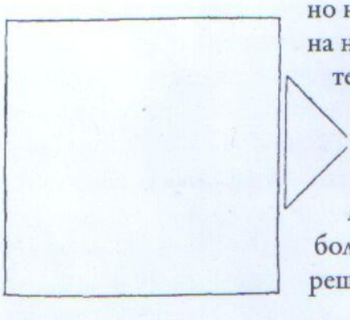
3. Задача про столяра

Я часто указываю на практическое применение загадок в повседневной жизни, где можно использовать маленькие хитрости, о которых мы узнаем, решая головоломки.

На иллюстрации столяр хочет разрезать кусок доски на наименьшее количество частей, чтобы, используя их все, сделать стол квадратной формы. Как он должен это сделать? Сколько частей для этого нужно?



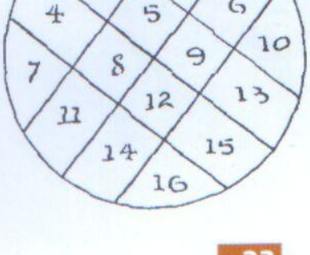
4. Другая задача про столяра



У одного столяра было два куска доски соответствующей формы и пропорции, как показано на иллюстрации слева. Он хотел разделить их на наименьшее количество частей, чтобы без потерь потом соединить и получить квадрат. Как он должен это сделать? Нет необходимости обозначать размеры, так как даже если от меньшей части (которая является половиной квадрата) будет отрезано менее или более необходимого, это не повлияет на способ решения.

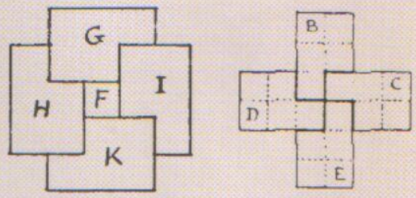
5. Загадка про картофель

Возьмите круглый кусочек картофеля, положите его на стол и посмотрите, на сколько частей можно его разделить с помощью шести разрезов ножом. Конечно же, не переставляя получившиеся части местами. Каково наибольшее количество частей, которые можно получить? Иллюстрация показывает, как получить 16 кусков. Но, конечно, этот рекорд легко побить.

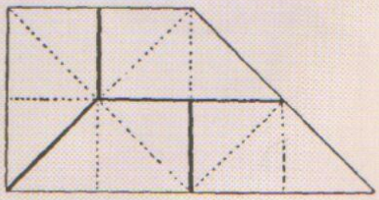


Решения

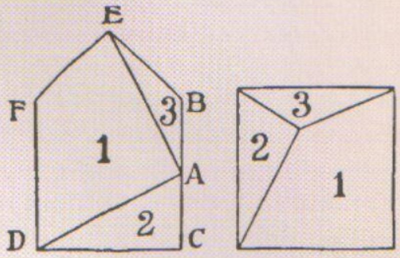
1. Иллюстрация внизу слева показывает, как нужно резать швы одеяла, чтобы получить целый квадрат *F* и четыре одинаковые детали *G*, *H*, *I* и *K*, из которых будет составлен греческий крест. Читатель поймет, как собрать эти части, посмотрев на рисунок справа.



2. Решение этой головоломки представлено на иллюстрации. Разделите фигуру на 12 одинаковых треугольников, и вы легко сможете порезать ее так, как показано на рисунке темными линиями.

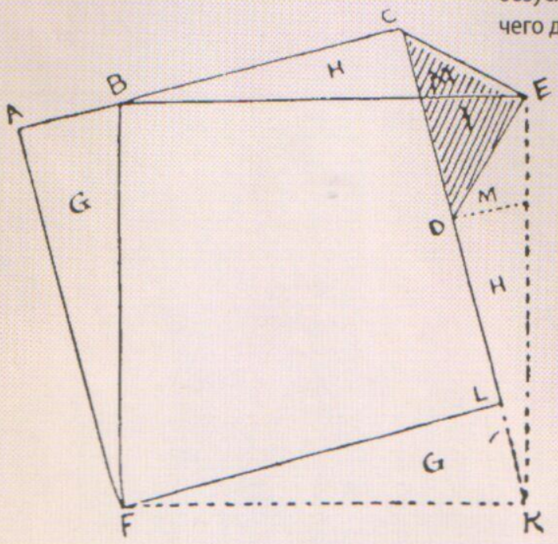


3. Наименьшее возможное количество частей — три. Нужно обозначить точку *A* на середине отрезка *BC*, а затем прочертить отрезки от точки *A* до *D* и *E*. Эти три части формируют квадрат, как показано на иллюстрации.



Все пропорции фигуры-оригинала должны быть правильными. Так, треугольник *BEF* является четвертой частью квадрата *BCDF*. Проведите линии от *B* до *D* и от *C* до *F*, и вы это увидите.

4. Это попытка найти общее правило, чтобы сформировать квадрат на базе другого квадрата, комбинированного с «прямоугольным равнобедренным треугольником». Треугольник, которому математики дали такое высокопарное название, всего лишь является половиной квадрата, разделенного из угла в угол.

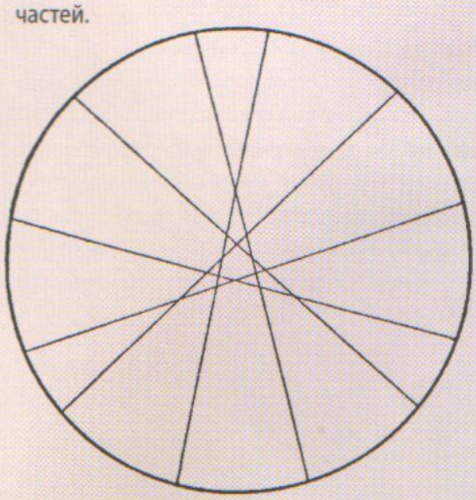


Соответствующие точные пропорции между квадратом и треугольником не относятся к данному случаю. Нужно лишь разрезать доску или ткань на пять частей.

Предположим, что наш первоначальный квадрат *ACLF*, а треугольник *CED* — тот, который заштрихован. Для начала нам нужно найти половину длины стороны треугольника (*CD*) и определить получившуюся длину отрезка *AB*. Затем мы ставим треугольник в его настоящую позицию относительно квадрата и проводим два пересекающих отрезка, один из *B* в *F*, а второй из *B* в *E*. Каким бы странным это ни казалось — все действия необходимы. Если сейчас мы сдвинем стороны *G*, *H* и *M* относительно их новых мест, как показано на чертеже, то получим квадрат *BEKF*.

Возьмите два любых квадратных листа бумаги (разного размера, главное — квадратных) и разрежьте наименьший из них пополам, из угла в угол. А теперь сделайте то, что мы рассматривали выше, и увидите, что обе части можно объединить в больший квадрат благодаря лишь этим небольшим отрезкам, без необходимости что-то поворачивать. Наблюдение о том, что треугольник мог бы быть немного больше или намного меньше в пропорции к квадрату, было нужно для того, чтобы исключить случаи, где площадь треугольника больше площади квадрата. В таких случаях необходимо шесть частей, и если треугольник и квадрат имеют одинаковую площадь, то безусловное решение — три части, для чего достаточно лишь разрезать квадрат пополам по диагонали.

5. С помощью шести разрезов можно разделить круглый кусок картофеля вплоть до 22 частей. Иллюстрация демонстрирует нам симметричное решение задачи. В таких случаях важно, чтобы каждый отрезок находился на пересечении с каждым противоположным пересечением таким образом, чтобы два отрезка никогда не пересекали одну и ту же точку. Есть еще способы произвести разрезы, но этот способ стоит рассматривать в случае, если мы хотим получить максимально большое количество частей.



Основная формула при количестве разрезов *n* может быть следующей: $[n(n+1)]/2 + 1$ частей. Одна из задач, предложенных Сэмом Лойдом, состояла в том, чтобы получить максимальное количество частей посредством *n* прямых разрезов в твердом сыре. Затем разрезанные части не могут быть перемещены или сдвинуты. Здесь речь идет о смещении плоскостей (а не линий), и формула такова, что при количестве разрезов *n* мы можем получить $[(n-1)\,n\,(n+1)]/6 + n + 1$ частей. Очень трудно «увидеть» направление и влияние последовательных разрезов для большого количества *n*.

Льюис Кэрролл

Запутанный рассказ

Узелок V. Крестики и нолики

▲ *«Ну что ж, идея не так уж плоха», — промолвила тетушка, когда они сошли с кэба у входа в Берлингтон-Хаус.*

«Как Вам нравится эта картина? А эта?»

— Что заставило тебя, глупышка, выбрать первый поезд? — спросила Безумная Математильда племянницу, когда они садились в кэб. — Неужели ты не могла придумать ничего лучше?

— Я рассмотрела предельный случай, — ответила Клара сквозь слезы. — Наша достопочтенная воспитательница всегда говорит нам: «Если вы сомневаетесь в чем-то, рассмотрите предельный случай», а я как раз была в сомнении.

— И что же, этот совет всегда помогает? — поинтересовалась тетушка.

— Не всегда, — вздохнула Клара, — хотя я никак не могу понять, в чем тут дело. Как-то раз наша достопочтенная воспитательница сказала девочкам из младших классов: «Чем больше вы будете шуметь, тем меньше получите варенья и *vice versa* (наоборот (лат.))». Я подумала, что девочки не знают, что такое *vice versa*, и решила объяснить им. Я сказала: «Если вы будете шуметь бесконечно громко, то не получите варенья совсем. Если же вы совсем не будете шуметь, то получите бесконечно много варенья», а наша достопочтенная воспитательница сочла пример неудачным. Хотела бы я знать почему, — добавила Клара жалобно.

— Твой пример действительно не может не вызвать возражений, — уклончиво сказала тетушка, — но мне любопытно знать, как ты перешла к пределу в задаче с поездами. Насколько мне известно, ни один поезд не движется бесконечно быстро.

— Одни поезда я назвала зайцами, другие — черепахами, — робко пояснила Клара. — Я думала, что число зайцев и черепах на линии не может быть одинаковым, и взяла поэтому предельный случай: одного зайца и бесконечно много черепах. Подумав, я решила, что если я сяду на черепаху, то встречу лишь одного зайца: ведь больше их и нет. Зато если я сяду на зайца, то встречу целые толпы черепах!

— Ну что ж, идея не так уж плоха, — промолвила тетушка, когда они сошли с кэба у входа в Берлингтон-Хаус. — А сейчас тебе представится еще один удобный случай проявить свою смекалку. Мы будем состязаться в оценке картин.

— Я буду очень стараться, — просияла Клара, — и на этот раз буду осторожнее. А как мы будем играть?

— Взгляни, — сказала Безумная Математильда Кларе минуту спустя. — Видишь, против названий картин я начертила три графы. В них мы будем ставить крестики и нолики: крестик вместо положительной оценки, а нолик вместо отрицательной. В первой графе мы будем ставить оценку за сюжет, во второй — за композицию, в третьей — за колористическое решение. Условия нашего состязания таковы: ты должна поставить три крестика двум или трем картинам, два крестика — четырем или пяти картинам...

— Что вы имеете в виду, когда говорите о двух крестиках? — спросила Клара. — Картины, отмеченные только двумя крестиками, или также и картины, отмеченные тремя крестиками?

— Картины, получившие три крестика, разумеется, можно считать получившими два крестика, — ответила тетушка. — Ведь о всяком, у кого есть три глаза, можно сказать, что уж два-то глаза у него заведомо есть, не так ли?

— Девяти или десяти картинам ты должна поставить один крестик, — продолжала перечислять условия состязания Безумная Математильда.

— А кто же выигрывает? — спросила Клара, тщательно записывая все сказанное.

— Тот, кто поставит оценки наименьшему числу картин. А если мы поставим оценки одинаковому числу картин, тогда тот, кто поставит больше оценок.

— Это состязание совсем нетрудное, — сказала Клара. — Я поставлю оценки девяти картинам. Трем из них я поставлю по три крестика, двум другим — по два крестика, а остальным — по одному крестику.

— Нетрудное состязание, говоришь? — спросила тетушка. — Подожди, пока не узнаешь все условия, нетерпеливое дитя! Одной или двум картинам ты должна поставить три нолика, трем или четырем картинам — по два нолика и восьми или девяти картинам — по одному нолику.

— Отсюда мы и начнем, — сказала Математильда, когда они подошли к картине огромных размеров, значившейся в каталоге под названием «Портрет лейтенанта Брауна верхом на любимом слоне».

— Какой у него самодовольный вид, — воскликнула Клара. — Не думаю, чтобы он был любимым лейтенантом бедного слона. Картина просто ужасна!

Тетушка и племянница вскоре потеряли друг друга в толпе, и в течение ближайшего получаса Клара трудилась в поте лица, ставя оценки, вновь стирая их и упорно разыскивая подходящие картины. Последнее оказалось труднее всего.

— Никак не могу найти того, что мне нужно! — воскликнула она наконец, чуть не плача с досады.

— Что ты хочешь найти, деточка? — раздался за спиной Клары незнакомый, но такой ласковый и приятный голос, что Клара, еще не видя произнесшего эти слова, почувствовала к нему горячую симпатию. Обернувшись, она увидела двух ласково улыбавшихся старушек небольшого роста с круглыми морщинистыми лицами, очень похожих друг на друга.

▲ *«Подожди, пока не узнаешь все условия, нетерпеливое дитя», — сказала безумная Математильда.*

— Я ищу картину, — сказала Клара, — написанную на хороший сюжет, с хорошей композицией, но с плохим колористическим решением.

Маленькие старушки тревожно переглянулись.

— Успокойся, деточка, — сказала одна из них, — и попытайся припомнить, что изображено на картине, каков ее сюжет.

— Не изображен ли на ней, например, слон? — спросила вторая старушка. С того места, где стояли Клара и старушки, нетрудно было заметить лейтенанта Брауна.

— Не знаю, — нетерпеливо ответила Клара. — Мне совсем неважно, каков сюжет картины, лишь бы он был хорошим!

Старушки снова тревожно переглянулись, и одна из них что-то прошептала на ухо другой. Клара смогла уловить лишь одно слово «...безумна».

— Ну, конечно, они имеют в виду мою тетю Математильду, — подумала она про себя.

— Если вы хотите видеть мою тетю, — добавила она вслух, — то она стоит вон там, через три картины от лейтенанта Брауна.

— Очень хорошо, деточка! Тебе лучше пойти к ней, — успокаивающе сказала новая знакомая Кларе. — Уж она-то сумеет найти картину, которая так тебе нужна. До свиданья, бедняжка!

— До свиданья, бедняжка! — как эхо, отозвалась другая сестра. — Постарайся больше не терять свою тетю.

И обе старушки, мелко семеня, вышли из зала. Клара удивленно посмотрела им вслед.

— Какие они милые! — подумала она. — Интересно, почему они так жалели меня?

И она отправилась вновь бродить по выставке, бормоча себе под нос:

— Нужно найти картину с двумя хорошими и одной...

(Пер. Ю. А. Данилова, публикуется с сокращениями.)

Решения

Задача

Поставить 3 крестика двум или трем картинам, 2 крестика четырем или пяти, 1 крестик девяти или десяти. Кроме того, поставить 3 нолика одной или двум картинам, 2 нолика трем или четырем, 1 нолик восьми или девяти. Необходимо отметить наименьшее количество картин наибольшим числом оценок.

Ответ

10 картин и 29 оценок, разделенных следующим образом:

```
+ + + + + + + + + 0
+ + + + +   0 0 0 0
+ + 0 0 0 0 0 0 0 0
```

Решение

Поставим все возможные крестики с дополнительными в скобках. У нас есть 10 картин, оцененных так:

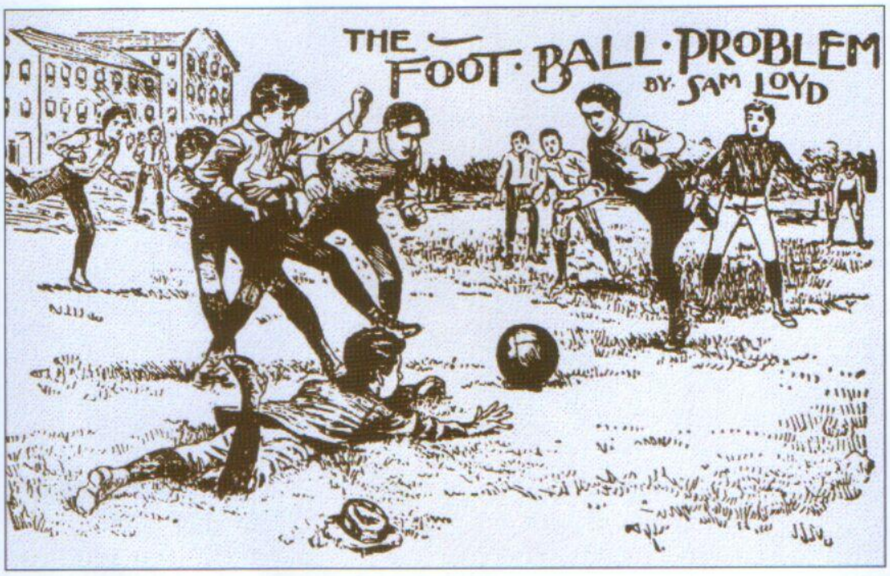
```
+ + + + + + + + + (+)
+ + + + + (+)
+ + (+)
```

Затем поставим нолики таким же способом, начиная с другой стороны. Имеем 9 картин, отмеченных следующим образом:

```
(0) 0
(0) 0 0 0
(0) 0 0 0 0 0 0 0 0
```

Все, что надо теперь сделать, это сблизить оба фрагмента насколько это возможно, чтобы получить наименьшее число картин. Будем стирать дополнительные оценки, если это позволит больше приблизить их, или оставлять их в противном случае. Мы видим 10 обязательных оценок в первой и в третьей строчках, но только 7 во второй. Таким образом, мы стираем все дополнительные оценки из первой и третьей строчек, но оставляем все во второй.

Задачи о детях



▲ *Какого размера мяч?*

1. Задача о футбольном мяче

У меня нет стальной защиты для носа, а потому я не хочу рисковать этим органом, засовывая его в игру, с которой не знаком. Наплечники и футбольные щитки не были в моде в мои школьные годы. Обычно мы играли в футбол просто ногами, как того и требует название этого вида спорта, и никогда не пытались калечить своих соперников. Однако моя задачка не будет иметь ничего общего ни с «пасами», ни с «дриблингом», ни даже с простым пинками по мячу. Это всего лишь воспоминание о тех днях, когда мы, деревенские дети, любили гонять резиновый мяч по зеленому полю. Мы жили в сельской местности и обычно заказывали мяч по почте. В каталоге одного из спортивных магазинов требовалось, чтобы клиенты при заказе «указывали точное количество дюймов». Вот здесь и возникает проблема.

Нас просили указать размер в дюймах, но мы не знали, что при этом имелось в виду: площадь поверхности мяча или объем воздуха внутри. Поэтому нам приходилось совмещать два этих параметра. Мы заказывали мяч, объем которого в кубических дюймах совпадал бы с площадью его поверхности в квадратных дюймах!

Кто из наших читателей сможет назвать диаметр заказанного мяча?

2. Эксцентричный преподаватель

Затронутая в этой задачке проблема возрастов, я уверен, развлечет молодых и одновременно даст пищу для размышлений научным работникам, сделавшим статистику своей специальностью.

Один умный и эксцентричный преподаватель, желая увеличить число старшеклассников в группе, организацией которой он занимался, объявил о ежедневной выдаче премии. Она полагалась той группе молодых людей или девушек, чей общий возраст будет больше.

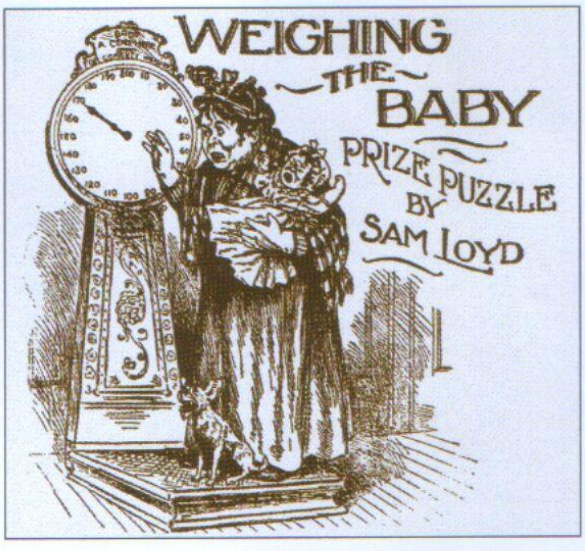
В первый день на занятие пришло только два человека, мальчик и девочка. Так как возраст мальчика был в два раза больше возраста девочки, то ему и была отдана премия. На следующий день девочка привела в школу свою старшую сестру. Так как возраст двух девочек был в два раза больше, чем возраст мальчика, то в этот день премию поделили они. Когда школа открылась на третий день, то оказалось, что мальчик привлек к соревнованию одного из своих братьев. На этот раз возраст мальчиков оказался в два раза больше возраста обеих девочек, поэтому премия досталась мальчикам.

Борьба между семьями Джонс и Браун разгорелась не на шутку, и на четвертый день две девушки пришли в школу со своей старшей сестрой. Таким образом, в этот день в группе оказались три девушки против двух мальчиков. Естественно, девушки выиграли премию четвертого дня, так как их общий возраст был вдвое больше общего возраста обоих мальчиков.

Битва продолжалась до того момента, пока класс не заполнился под завязку, но нам развивать эту задачу уже необязательно. Мы хотели бы узнать возраст того самого первого мальчика, пришедшего в группу нашего хитроумного преподавателя, принимая во внимание ту информацию, что последняя девушка вошла в класс в день, когда ей исполнился 21 год.

Это простая, но очаровательная задачка, для разгадки которой необходимо больше изобретательности, нежели математических знаний. Вы легко ее разгадаете, пользуясь типичными для головоломок способами решения.

▼ *Сколько весит ребенок госпожи О'Тул?*

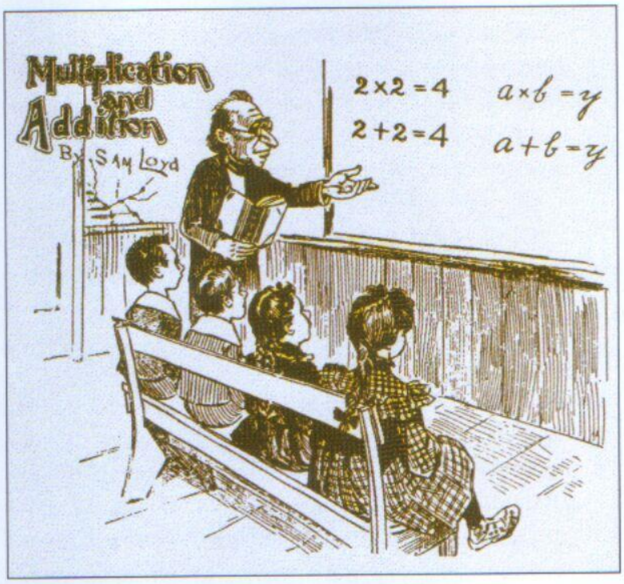


3. Взвешивая ребенка

Госпожа О'Тул — весьма экономная дама. Она пытается взвеситься сама, взвесить своего ребенка и собаку, и все это за один цент. Если она весит на 100 фунтов больше, чем собака и ребенок вместе, а собака весит на 60% меньше ребенка, можете ли вы определить вес маленького ангелочка?

4. Умножение и сложение

Преподаватель объясняет своим ученикам: дважды два дает тот же результат, что и два плюс два. Хотя 2 — единственное натуральное число с такими свойствами, есть много пар чисел, способных заменить a и b в уравнениях, написанных на доске (иллюстрация ниже). Можете ли вы найти подобную пару? Конечно, это могут быть и дробные числа, но их произведение должно быть равно их сумме.



◀ *Найдите такие различные значения a и b, чтобы $a \times b = a + b$.*

5. Загадка о перетягивании каната

Сила четырех крепких мальчиков равна силе пяти пухлых девочек.

Две пухлые девочки и один крепкий мальчик не уступают в борьбе против стройных близнецов.

Стройные близнецы и три пухлые девочки против одной пухлой девочки и четырех крепких мальчиков. Кто выиграет последний раунд?

Решения

1. Объем мяча можно рассматривать как совокупность большого количества маленьких пирамид, чьи вершины обращены к центру мяча, а основания составляют его поверхность.

Мы знаем, что объем пирамиды равен площади поверхности ее основания, умноженной на 1/3 ее высоты. Таким образом, объем сферы равен сумме оснований пирамид, умноженной на треть высоты. В нашем случае это поверхность сферы, умноженная на треть радиуса. Так как этот объем совпадает с площадью поверхности, то получается, что треть радиуса равна единице. Таким образом, радиус равен 3 дюймам, а диаметр мяча составляет 6 дюймов.

2. Первой девочке было 638 дней, а мальчик вдвое ее старше, то есть ему 1 276 дней. На следующий день самой младшей девочке было уже 639 дней, а новенькой 1 915. Их общий возраст 2 544 дня, что вдвое больше возраста первого мальчика, которому на второй день было 1 277 дней. На третий день мальчик 1 278 дней от роду привел своего старшего брата, которому исполнилось 3 834 дня. Таким образом, на двоих мальчиков приходится 5 112 дня, что ровно в два раза больше возраста девочек, которым в этот день 640 и 1 916 дней соответственно, то есть всего 2 566 дней.

Мы приходим к 7 670 дням следующим образом. Девушка пришла в школу в день своего 21-го дня рождения. Умножаем 21 на 365, получаем 7 665. Плюс еще 4 дня за високосные годы, плюс 1 день за первый день после дня рождения.

Те, кто сказал, что мальчику три с половиной года, проигнорировали тот факт, что возраст учеников увеличивался каждый день.

3. Госпожа О'Тул весит 135 фунтов, ребенок весит 25 фунтов, а собака — 10 фунтов.

(Задача имеет несколько решений.)

4. Существует бесконечное количество пар чисел, произведение и сумма которых совпадают. Если одно число a, то второе всегда можно получить делением a на a-1. Например, $3 \times 1{,}5 = 4{,}5$ и $3 + 1{,}5 = 4{,}5$.

5. Объединенная сила четырех крепких мальчиков равна силе пяти пухлых девочек. Как показывает вторая иллюстрация, стройные близнецы уравнены по силе с одним крепким мальчиком и двумя пухлыми девочками. Упростим изображение на третьей картинке, поменяв двух стройных близнецов на эквивалентную им силу, то есть на одного крепкого мальчика и двух пухлых девочек. Благодаря этой замене сейчас на третьей картинке у нас пять пухлых девочек и один крепкий мальчик борются против одной пухлой девочки и четырех крепких мальчиков. Уберем пять пухлых девочек с одной стороны и четырех крепких мальчиков с другой, так как первый рисунок показывает нам, что они равны по силе. После этого у нас останутся крепкий мальчик слева и пухлая девочка справа. Это означает, что команда слева с третьей картинки должна выиграть, так как у них на одну пятую больше силы, чем у команды справа.

• • •

Лучшее от Генри Э. Дьюдени

Геометрические задачи

1. Картонная коробка

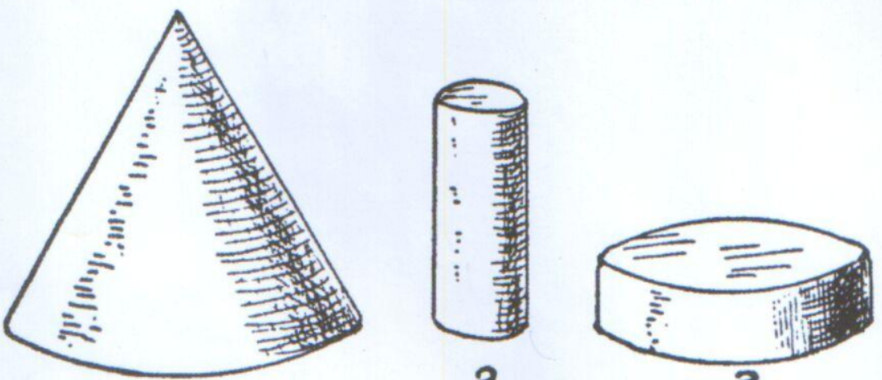
Это несложная задачка, но давайте попробуем найти простой способ ее решения.

У меня есть прямоугольная картонная коробка. Верхняя ее поверхность имеет площадь, равную 120 квадратным дюймам, площадь одной стороны коробки — 96 квадратных дюймов, площадь другой — 80 квадратных дюймов. Каковы точные размеры коробки?

2. Как нарисовать овал

Вы можете нарисовать овал на бумаге одним движением циркуля? Это проще простого, если знать, как.

3. Задачка про конус



1 2 3

У меня есть деревянный конус, такой как на рисунке 1. Как мне его обрезать, чтобы получить цилиндр максимально возможного объема? Я мог бы вырезать высокий и тонкий цилиндр, как на рисунке 2, или маленький и широкий — такой как на рисунке 3. Даже ребенок мог бы сказать, где надо резать, если бы знал принцип разреза. Можете ли вы догадаться, что это за простое правило?

4. Задача про сферу

Как-то раз каменщик решил вырезать сферу для архитектурного украшения. Мимо проходил сообразительный школьник.

— Постой, — сказал ему каменщик, — ты похож на умного мальчика. Сможешь ответить мне на вопрос? Если я поставлю эту сферу на плоскость, сколько таких же сфер я могу поставить рядом с ней, чтобы каждая сфера соприкасалась с этой?

Мальчик тут же дал ему правильный ответ и спросил в свою очередь:

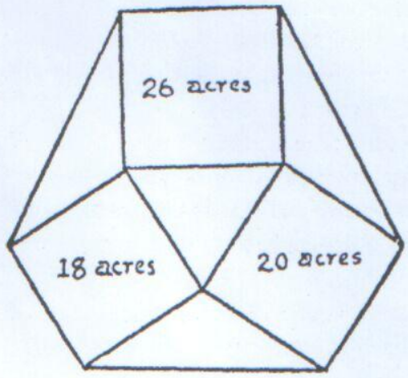
— Если бы поверхность этой сферы содержала столько же квадратных футов, сколько кубических футов в ее объеме, какова была бы длина диаметра?

Каменщик не смог ему ответить.

А вы можете ответить правильно на вопрос каменщика? А на вопрос мальчика?

5. Усадьба фермера Вурзеля

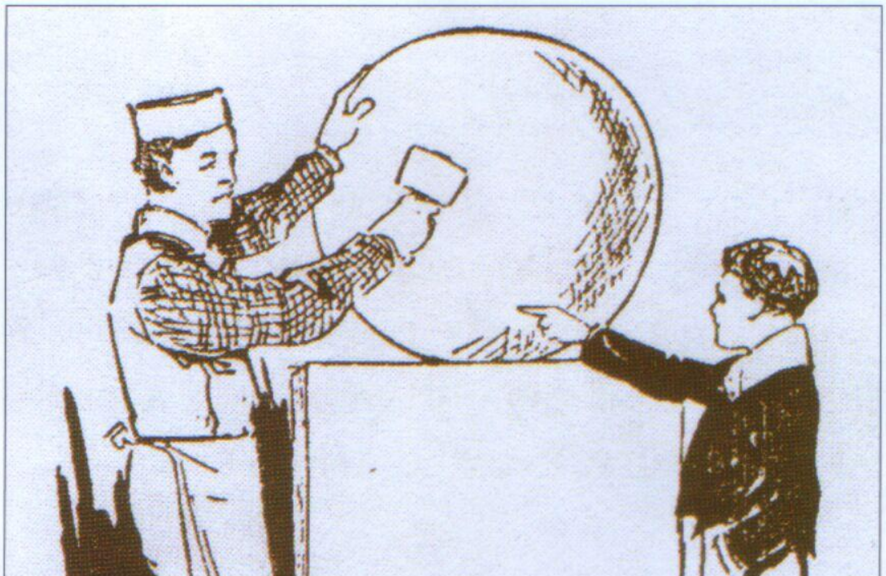
Теперь я расскажу об одной «земельной» проблеме. Думаю, что мой ответ будет интересен, и вы его легко поймете.



У фермера Вурзеля было три квадратных участка площадью 18, 20 и 26 акров (см. рисунок). Чтобы соединить свои владения, он купил четыре треугольных участка, расположенных между ними. Сможете вычислить общую площадь усадьбы Вурзеля?

6. Восемь палочек

У меня есть восемь палочек. Четыре из них в два раза короче остальных. Я разложил их на столе таким образом, что получилось три одинаковых квадрата. Как у меня это вышло? Все палочки должны быть использованы.



▼ *Если бы поверхность этой сферы содержала столько же квадратных футов, сколько кубических футов в ее объеме, какова была бы длина диаметра?*

Решения

1. Площадь верхней поверхности, умноженная на площадь одной стороны и разделенная на площадь другой стороны, даст нам квадрат длины. Аналогично умножение площади верхней поверхности на площадь второй стороны, разделенная на площадь первой стороны, дает квадрат ширины. Произведение площадей обеих сторон, разделенное на площадь верхней поверхности, дает квадрат глубины. Нам достаточно выполнить всего лишь одну из этих операций. К примеру, $120 \times 96 / 80 = 144$. 144 — это квадрат 12. Значит, длина коробки — 12 дюймов. Теперь можно легко найти ширину и глубину — 10 и 8 дюймов соответственно.

2. Если вы обернете бутылку или цилиндрическую поверхность листом бумаги, то нарисовать овал на листе можно будет всего лишь одним оборотом циркуля.

3. Правило заключается в том, чтобы отрезать конус на 1/3 его высоты.

4. Если сферу поставить на гладкую поверхность, то рядом с ней на ту же поверхность можно поставить шесть таких же сфер таким образом, что все они будут соприкасаться с центральной.

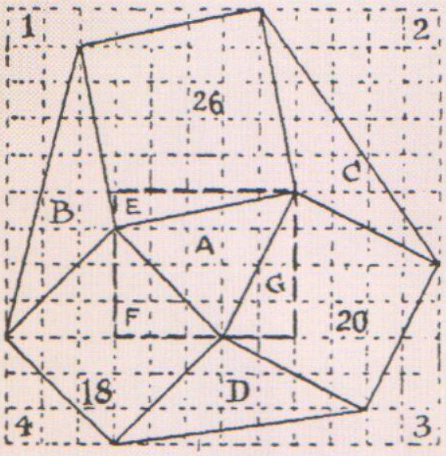
Что касается второго вопроса, то отношение диаметра круга к его окружности называется числом π («пи»). И хотя мы не можем выразить это число точной цифрой, мы можем использовать его приблизительное значение в любых практических целях. В нашем случае совершенно не обязательно знать значение числа π, и вот почему. Для того чтобы найти площадь сферы, мы умножаем квадрат диаметра на число π; чтобы найти объем сферы, умножаем диаметр в кубе на одну шестую числа π. Приравнивая эти формулы друг к другу, мы можем сократить число π и искать только число, квадрат которого равен одной шестой его же куба. Очевидно, что это число 6. Поэтому сфера была диаметром в 6 футов, площадь ее поверхности равна 36 π квадратных футов, а объем сферы — 36 π кубических футов.

5. Площадь всей фермы равна 100 акрам.

Чтобы получить этот результат, используем следующую формулу:

$$\sqrt{\frac{4ab-(a+b+c)^2}{4}},$$

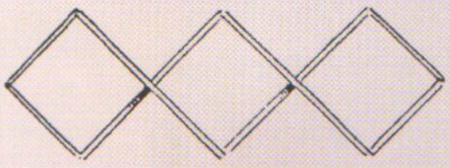
где a, b, c — площади трех квадратных участков в любом порядке. Выражение задает площадь треугольника A. Видно, что его площадь равна 9 акрам. Легко доказать, что треугольники A, B, C и D одинаковы по площади. Таким образом, ответ: $26 + 20 + 18 + 9 + 9 + 9 + 9 = 100$ акров.

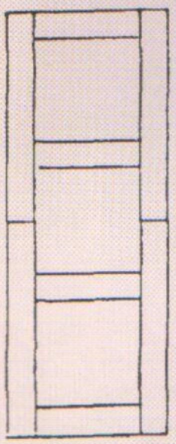


Приведем доказательство. Если площадь каждого маленького пунктирного квадрата на рисунке составляет 1 акр, то перед нами — точный план владения, ведь сумма квадратов 5 и 1 равна 26; сумма квадратов 4 и 2 равна 20; сумма квадратов 3 и 3 равна 18. Видим, что площадь треугольника E равна 2 1/2, площадь треугольника F равна 4 1/2, площадь треугольника G равна 4. Сумма их площадей составляет 11 акров. Отсюда выводим площадь центрального прямоугольника — 20 акров. Получаем, что площадь участка A равна 9 акрам. Докажем, что треугольные участки B, C и D имеют ту же площадь, что и участок A. Поделив каждый из них на две части линией, идущей от середины самой длинной стороны до противоположного угла, мы увидим, что половинки каждого из треугольников B, C и D, будучи вырезанными, идеально подойдут для формирования треугольника A.

Этот же результат можно получить более простым способом. Наша схема поделена на квадраты площадью 1 акр. Общая площадь схемы $12 \times 12 = 144$ акра. Части 1, 2, 3, 4, не включенные во владение, имеют площади соответственно 12 1/2, 7 1/2, 9 1/2 и 4 1/2 акров. Их сумма составляет 44 акра. Вычитая 44 из 144, получаем результат — 100 акров. Это и есть необходимая нам площадь всего владения.

6. На первом рисунке изображен тот ответ, который дают на эту задачку почти все. На первый взгляд это решение кажется удовлетворительным. Но давайте





взглянем на условия. Нам нужно положить каждую из палочек на стол. Если мы прислоним лесенку к стене, только одним концом оставив ее на земле, то мы не сможем сказать, что она «стоит на земле». И если мы поставим наши палочки так, как показано на рисунке выше, то увидим, что только один конец «лесенки» из двух касается стола; сказать, что каждая из палочек стоит на столе, было бы неправильно. Чтобы найти верное решение, необходимо иметь палочки нужного размера. Допустим, длинные палочки имеют длину 8 дюймов, а короткие — 4 дюйма. Наши палочки должны иметь толщину 1 дюйм — только в этом случае мы получим три одинаковых замкнутых квадрата, как показано на втором рисунке. Если бы я сказал «спички», а не «палочки», то решение задачки было бы невозможным, потому что обычная спичка имеет длину приблизительно в 20 раз бóльшую, нежели толщина, и внутри «лесенки» были бы прямоугольники, а не квадраты.

Льюис Кэрролл

Запутанный рассказ

Узелок VI
Ее Блистательство

Я твой совсем не понимай,
Но твой поймешь все вдруг,
Когда изведаешь, сагиб,
По пяткам ты бамбук.

Едва путешественники высадились на берег, как их повели во дворец. На полпути вновь прибывших гостей повстречал губернатор, приветствовавший наших знакомых на английском языке — к великому их облегчению, ибо, как выяснилось, приставленный к ним гид говорил лишь на кговджнийском диалекте.

— Не нравятся мне ухмылки этих туземцев, — прошептал пожилой путешественник на ухо сыну. — Что они на нас так уставились? И почему без конца повторяют «бамбук»?

— Они имеют в виду местный обычай, — пояснил губернатор, случайно услышавший вопрос. — Те, кто каким либо образом осмелятся вызвать неудовольствие Ее Блистательства, подвергаются наказанию: их бьют бамбуковыми палками по пяткам.

Пожилой путешественник поежился.

— Какой варварский обычай! Мне он очень не нравится! — заметил он, делая особое ударение на «мне» и «не нравится».

— Престарелый чужеземец чем то опечален? — с некоторым беспокойством заметил губернатор. — Может быть, на его совести тяжкое преступление?

— Моя совесть чиста, — поспешно воскликнул пожилой джентльмен. — Скажи ему, Норман, что я не совершал никаких преступлений.

— Пока еще не совершал, — веско подтвердил Норман, и губернатор тоном глубочайшего удовлетворения повторил:

— Пока еще не совершал.

Губернатор ввел наших путешественников в ворота дворца. В полном молчании отец и сын проследовали за своим провожатым по длинному коридору и вскоре оказались в величественном зале, все стены которого были сплошь покрыты павлиньими перьями. Ее Блистательство — полная дама крохотного росточка — в мантии из зеленого шелка, сплошь усыпанной серебряными звездами, восседала в центре зала на груде алых подушек. Бледное круглое лицо ее на миг озарилось отдаленным подобием улыбки, когда путешественники склонились в низком поклоне, и вновь обрело полную неподвижность восковой маски, когда она еле слышным голосом обронила несколько слов на кговджнийском диалекте.

▲ *— Почему они без конца повторяют «бамбук»?*

— Ее Блистательство приветствует вас, — перевел губернатор, — и отмечает Невозмутимое Спокойствие старости и Незрелую Поспешность юности.

От путешественников явно ожидали ответной речи.

— Мы благодарим Ее Недосягаемое Всемогущество, — дрожащим голосом начал престарелый путешественник, — чья улыбка согревает нас, подобно...

— Слова старцев слабы! — недовольно прервал его губернатор. — Пусть скажет юноша!

— Передайте ей, — воскликнул Норман в необычайном порыве красноречия, — что в присутствии Ее Многозвездного Всесокрушительства мы особенно остро ощущаем свое ничтожество, подобно двум жалким козявкам, попавшим в жерло клокочущего вулкана.

— Неплохо сказано, — одобрил губернатор и перевел речь Нормана на кговджнийский.

— А теперь я сообщу вам, — продолжал он, — что угодно Ее Блистательству потребовать от вас, прежде чем вы покинете этот дворец.

Только что закончился ежегодный конкурс на замещение должности Придворной Вязальщицы Шарфов. Вы назначаетесь судьями. Вынося свое решение, вы должны принять во внимание, насколько быстро связан шарф, насколько он легок и хорошо ли он греет. Обычно участницы конкурса расходились лишь по одному из трех пунктов. Например, в прошлом году Фифи и Гого в течение испытательного срока — недели — успели связать одинаковое количество одинаково теплых шарфов, но шарфы, связанные Фифи, оказались вдвое теплее, чем шарфы, связанные Гого, поэтому Фифи и сочли вдвое лучшей вязальщицей, чем Гого. Но в этом году — о горе мне! — рассудить, кто из вязальщиц лучше, выше человеческих сил. В конкурсе приняли участие три вязальщицы, и связанные ими шарфы отличаются по всем трем пунктам! Ее Блистательство уполномочила меня заявить, что на время разбора столь сложного казуса вы будете расквартированы — разумеется, бесплатно — в лучшей темнице и будете в изобилии получать лучший хлеб и воду.

Пожилой путешественник, услышав страшную весть, застонал.

— Все пропало! — воскликнул он в отчаянии.

Норман повел себя иначе: вытащив из кармана блокнот, он спокойно принялся записывать данные об участницах конкурса.

— Их трое: Лоло, Мими и Зузу, — сообщил губернатор. — За то время, которое требуется Мими, чтобы связать 2 шарфа, Лоло успевает связать 5 шарфов, но пока Лоло вяжет 3 шарфа, Зузу успевает связать 4 шарфа! И это не все! Шарфы, связанные Зузу, легче пуха — 5 ее шарфов весят не больше, чем один шарф, связанный Лоло, — но шарфы Мими еще легче! 5 шарфов Мими весят столько же, сколько 3 шарфа Зузу! Но и это еще не все! Один шарф Мими греет так же, как 4 шарфа Зузу, а один шарф Лоло — так же, как 3 шарфа Мими!

Тут маленькая леди еще раз хлопнула в ладоши.

— Аудиенция окончена! — поспешно сказал губернатор. — Вы должны подарить Ее Блистательству прощальные комплименты и выйти из зала, не показав ей спину!

Пятиться мелким шагом — единственное, на что еще был способен турист постарше. Норман просто сказал:

— Передайте Ее Блистательству, что мы оцепенели при виде Ее Лучезарного Сверкательства и из последних сил шлем свой прощальный привет Ее Августейшей Сметанности!

— Ее Блистательство выражает свое удовлетворение, — сообщил губернатор после тщательного перевода прощального комплимента Нормана. — Она озаряет вас взглядом Своих Царственных Глаз и выражает уверенность, что вы можете поймать этот взгляд!

— Хоть эта задача нам по силам! — в отчаянии простонал старший из путешественников.

Они еще раз низко поклонились и, выйдя из зала, по винтовой лестнице спустились в Собственную Ее Блистательства Темницу, которая оказалась выложенной разноцветным мрамором, освещалась через крышу и имела великолепную, хотя и без излишней роскоши, обстановку — одну-единственную скамью из полированного малахита.

— Надеюсь, вы не станете затягивать свое решение, — сказал губернатор, вводя отца и сына в темницу с соблюдением всех правил придворного этикета. — Должен предупредить вас, что у тех несчастных, которые не слишком торопились исполнить повеления Ее Блистательства, возникали разного рода неприятности, подчас большие и серьезные. В подобных случаях Ее Блистательство действует весьма решительно. Она говорит: «Что должно быть совершено, да свершится!» — и приказывает дать еще десять тысяч ударов бамбуковыми палками сверх обычного наказания.

С этими словами губернатор покинул путешественников, и они услышали, как за дверью лязгнул засов и щелкнул замок.

— Говорил я тебе: добром это не кончится! — простонал, ломая в отчаянии руки, пожилой путешественник. В своих страданьях он забыл, что сам выбрал маршрут путешествия и никогда ничего подобного не пророчил. — О, если бы нам только благополучно разделаться с этим проклятым конкурсом!

— Не падай духом! — бодро воскликнул молодой человек. — *Haec olim meminisse juwabit*! («Когда-нибудь об этом будет приятно вспомнить» — лат.) Вот увидишь, все будет хорошо! Слава еще увенчает нас розами!

— Розами с «г» после «з»! — вот все, что мог вымолвить несчастный отец, в отчаянии раскачиваясь взад и вперед на малахитовой скамье. — С «г» после «з»! — повторил он.

(Сокращенный перевод Ю. А. Данилова.)

Решение

Задача

Лоло вяжет 5 шарфов, Мими за это же время вяжет 2 шарфа. За время, за которое Зузу вяжет 4 шарфа, Лоло вяжет 3. 5 шарфов, связанных Зузу, весят столько же, сколько один шарф Лоло; 5 шарфов Мими — столько же, сколько 3 шарфа Зузу. Один шарф Мими греет так же, как 4 шарфа Зузу; один шарф Лоло — как 3 шарфа Мими. Кто вяжет лучше, если быстрота, легкость и теплота шарфов одинаково ценны?

Ответ

В порядке от лучшей к худшей: Мими, Лоло, Зузу.

Решение

Обозначим Мими буквой M, Зузу — Z, Лоло — L. Если учитывать только скорость (при прочих равных факторах), то соотношение между L и M равно 5/2, а между Z и L — 4/3. Чтобы получить три числа, удовлетворяющие этим условиям, проще всего принять за единицу то число, которое фигурирует в условии дважды. Тогда L, M и Z будут соответственно равны 1, 2/5 и 4/3. При оценке веса учтем, что чем больше вес, тем меньше преимущество шарфа, поэтому Z будет относиться к L как 5/1. Таким образом, оценки за легкость соответственно равны 1/5, 5/3 и 1. Аналогично оценки теплоты шарфов равны 3, 1 и 1/4 соответственно. Чтобы получить итоговый результат, нужно перемножить все оценки L между собой, затем произвести аналогичные действия для M и Z.

Итоговый результат: $1\times1/5\times3$, $2/5\times5/3\times1$ и $4/3\times1\times1/4$, то есть 3/5, 2/3, 1/3. Умножив все три числа на 15 (что не изменит соотношения между ними), получим 9, 10 и 5. Таким образом, порядок от лучшей к худшей ткачихе выглядит так: M, L, Z.

Лучшее от Сэма Ллойда

Головоломки с перемещением

1. Пятнашки

Старожилы Страны Загадок вспомнят, что в 1870-е годы весь мир сходил с ума по головоломке, состоявшей из коробочки с пронумерованными костяшками, получившей название «Пятнашки», или «Головоломка 14—15». Пятнадцать костяшек располагаются в квадратной коробке по порядку, но костяшки с номерами 14 и 15 переставлены местами, как показано на рисунке внизу. Задача: перемещая костяшки по одной, восстановить их изначальное положение, расположив при этом костяшки 14 и 15 в верном порядке.

Премия в 1000 долларов, обещанная тому, кто первым найдет решение задачи, до сих пор не присуждена никому, хотя тысячи людей хвастаются, что им удалось решить головоломку. Люди сходили с ума, пытаясь решить эту задачу. Рассказывали смешные истории о торговцах, которые забыли обо всех делах, а один священник как-то зимой провел всю ночь на улице под фонарем, пытаясь вспомнить найденное им решение. Никто из тех, кому якобы удалось решить головоломку, загадочным образом не мог вспомнить решения. Говорят, что в попытках справиться с головоломкой капитаны сажали корабли на мель, машинисты пропускали станции, а фермеры забывали об урожае. Как раз такой незадачливый фермер и изображен на рисунке.

Стоит рассказать о других задачах, которые появились на основе исходной головоломки.

Задача № 2. Расставьте костяшки так, как показано на рис. 1, и расположите их по порядку. При этом пустой квадрат должен находиться не в нижнем правом, а в левом верхнем углу.

Задача № 3. Начните с той же исходной позиции, поверните коробку с костяшками на 90° и попытайтесь расположить костяшки так, как показано на рис. 2.

Задача № 4. Начните с той же исходной позиции и расположите костяшки так, чтобы они образовали «магический квадрат», в котором сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце и по диагоналям была бы одинакова и равнялась 30.

Рис. 1

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

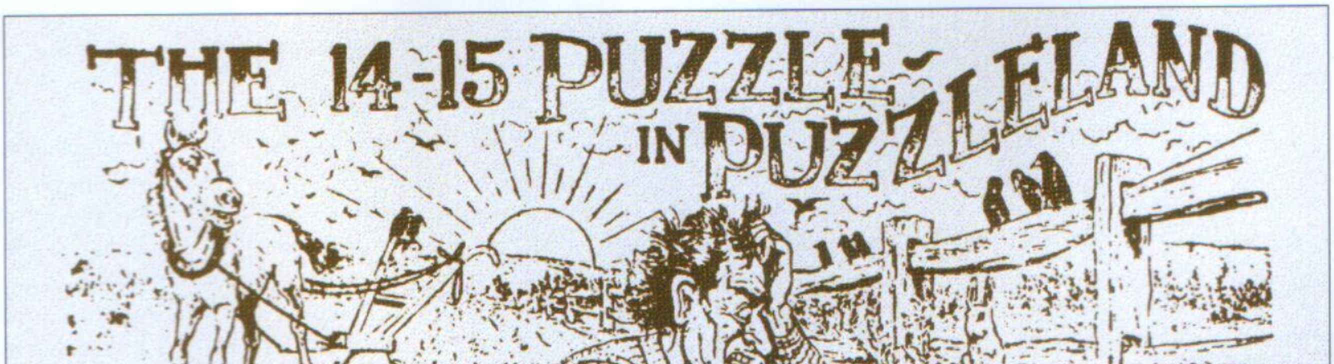
Рис. 2

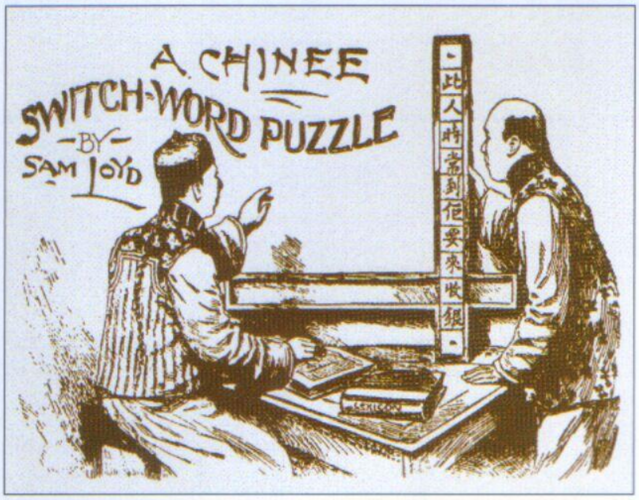
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

2. Китайская головоломка о замене слова

Эта интересная головоломка принадлежит к той же серии, что и моя старая задача «14—15». Предполагается, что на каждом из кубиков нарисована буква, и если читать сверху вниз, то буквы образуют слово. Задача: переставить кубики так, чтобы это же самое слово можно было прочитать слева направо.

▼ *Восстановите правильный порядок пронумерованных костяшек.*





◀ *Выберите слово из 12 букв и измените его положение за наименьшее число ходов.*

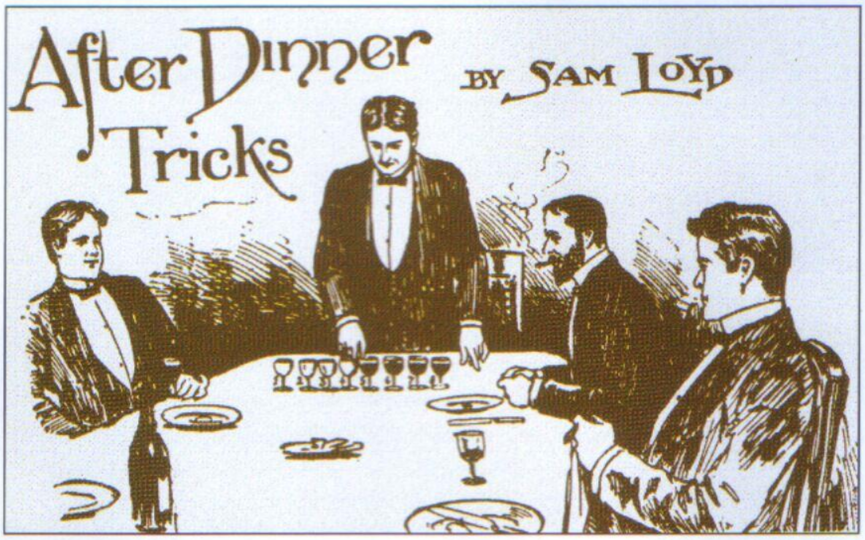
ставая общаться со зрителями, он должен убедить их, что задача очень проста и что любой, если только он не беспросветно глуп, может решить ее. В действительности задача выглядит настолько простой, что почти все соглашаются сыграть в нее, надеясь легко с ней справиться. Здесь и начинается веселье — 99 игрокам из 100 это не удается. Суть задачи объясняется в подписи к рисунку. Каждый ход состоит в том, что нужно поднять два соседних бокала и, не меняя их местами, переставить в другое место вдоль линии. Чтобы упростить объяснение, все бокалы пронумерованы.

Вы можете использовать любое слово из 12 букв, но для каждого слова результаты будут отличаться. Некоторые слова предпочтительнее других. Удача и опыт помогут вам найти слово, для которого можно решить головоломку за наименьшее число ходов.

3. Настольные игры

Для читателей, интересующихся играми, которыми можно развлечь друзей, я привожу интересную головоломку. С ее помощью вы сможете развлечь гостей на приеме или торжестве. Нам понадобится восемь бокалов вина (четыре пустых и четыре полных). Как и во всех похожих задачах, здесь все зависит от опыта и умения ведущего. Он должен в совершенстве знать свою роль и уметь исполнять ее без малейших сомнений. Не пере-

▼ *Поднимая по два соседних бокала за один раз, переставьте бокалы за четыре хода так, чтобы пустые и полные бокалы чередовались.*



Решения

1. Исходную головоломку невозможно решить, если не считать уловки, при которой костяшки с номерами 6 и 9 меняются местами. Одна из особенностей заключается в том, что любой подобный обмен двух костяшек мгновенно делает головоломку решаемой. В действительности любое нечетное число замен произведет тот же эффект, а после любого четного числа замен головоломка останется нерешаемой. Читатели, которым хотелось бы узнать об интересной математической структуре этой головоломки, мы рекомендуем ознакомиться с классической работой В. В. Джонсона и В. Е. Стори *Notes on the 15-Puzzle* («Комментарии к головоломке „Пятнашки“»), *American Journal of Mathematics*, том 2, 1879 г., стр. 397 и далее. Более краткие обсуждения этой темы вы можете найти в книгах по занимательной математике.

Следующие три задачи решаются так… Позиции, изображенной на рис. 1, можно достичь за 44 хода: 14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7, 4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9, 12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13, 9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14, 10, 6, 2, 1.

Позиции, изображенной на рис. 2, можно достичь за 39 ходов: 14, 15, 10, 6, 7, 11, 15, 10, 13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 10, 13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 15, 14, 13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12.

Магический квадрат можно составить за 50 ходов: 12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15, 14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6, 5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3. 2.

2. В исходной китайской головоломке используется молитва из 12 слов, поскольку в китайском языке каждое слово представлено особым символом. В североамериканской версии игры эту молитву нужно перевести или представить одним словом из 12 букв, чтобы на каждом кубике была нарисована буква. Лишь немногие обратили внимание на ремарку о том, что существует особенно подходящее слово, и заметили фразу о переводчиках с китайского. Подходящее слово — «interpreting» («перевод»). Для этого слова головоломка решается в 12 ходов без всяких «развилок».

3. Задачу о четырех пустых и четырех полных бокалах можно решить так: один длинный ход, два коротких, потом один длинный. Сначала переместите бокалы 2 и 3 до конца вправо, затем заполните образовавшийся промежуток бокалами 5 и 6. В получившийся промежуток поставьте бокалы 8 и 2. Последним ходом переместите бокалы 1 и 5.

Лучшее от Генри Э. Дьюдени

Арифметические и алгебраические задачи

1. Простое деление

Иногда простой вопрос из элементарной арифметики может поставить всех в тупик. Например, я хочу разделить четыре числа, а именно 701, 1 059, 1 417 и 2 312 на максимально возможное число так, чтобы остаток от деления на него всех четырех чисел был одинаковым. Как же это можно сделать? Конечно, с помощью запутанного метода проб и ошибок можно получить верный ответ, но существует и более простой способ. Какой?

2. Девять шкатулок

Следующая головоломка показывает, как важно порой знать границы интервала, которому принадлежит число. Это может пригодиться достаточно часто. Например, до сих пор неизвестно, сколькими способами шахматный конь может обойти всю доску, пройдя по каждой клетке ровно один раз. Но мы знаем, что это число меньше, чем количество сочетаний из 168 по 63, и больше, чем 31 054 144 (это количество путей определенного типа). Можно взять и более знакомый пример. Если спросить кого-нибудь, сколько монет у него в кармане, он затруднится с ответом. Но задав ему еще несколько вопросов, мы можем получить ответ вида: «Да, я думаю, что у меня больше трех монет, и точно уверен, что их меньше 25». Итак, зная, что некое число в моей головоломке находится в промежутке между 2 и 12, читатель сможет дать верный ответ. Без этой информации число ответов было бы бесконечным, и выбрать из них единственно правильный было бы невозможно.

Эту головоломку мне рассказал мой друг дон Мануэль Родригес, эксцентричный скупец из Новой Кастилии. В новогоднюю ночь 1879 года он показал мне девять шкатулок. Он сообщил, что в каждой шкатулке находится квадратное число золотых дублонов, и разница между числом дублонов в шкатулках A и B такая же, как и между B и C. Та же разница между количеством монет в шкатулках D и E, E и F, G и H, H и I. Затем он попросил меня определить, сколько же монет в каждой шкатулке.

▲ *Дон Мануэль Родригес, эксцентричный скупец, попросил меня определить, сколько монет лежит в каждой шкатулке.*

Сначала я решил, что это невозможно и что число ответов бесконечно велико, но, поразмыслив, понял, что это не так. Ни одна из шкатулок не была пустой. Вес шкатулок A, B и C увеличивался в соответствии с алфавитным порядком, то же самое верно для D, E, F и для G, H, I. Однако шкатулки D или E не обязательно должны быть тяжелее C, а шкатулки G или H не обязательно тяжелее F. Также было очевидно, что шкатулка A может содержать не более дюжины монет. Зная это, я смог найти верный ответ.

Короче говоря, нам нужно найти девять чисел (представляющих из себя квадрат чисел), таких что каждая тройка чисел (A, B, C; D, E, F и G, H, I) образовывала бы арифметическую прогрессию. Разница между числами в каждой группе должна быть одинакова. Кроме того, A меньше 12. Сколько же дублонов лежало в каждой из девяти шкатулок?

3. Задача банкира

У одного банкира был азартный клиент, который всегда был готов ввязаться в спор. Желая излечить его от этой дурной привычки, банкир предложил поспорить, что клиент не сможет разделить содержимое ящика, в котором находились только монеты, на равные части.

Банкир положил одну или более монет в ящик (столько, сколько ему захотелось), затем клиент добавил одну или более монет, но не больше 40. При этом ни банкир, ни клиент не знали, сколько же монет положил другой. Наконец, клиент должен был положить в ящик столько монет, сколько пожелает банкир. Определите, сколько монет должен положить в ящик банкир и сколько монет должен положить в ящик клиент по просьбе банкира, чтобы банкир имел наибольшие шансы выиграть.

4. Задача султана

Один султан решил отправить в сражение армию, которая могла бы построиться в два квадрата двенадцатью различными способами. Какое наименьшее число солдат может быть в такой армии?

Чтобы сделать задачу понятнее, поясню, что если бы в армии было 130 солдат, то они смогли бы построиться в два квадрата только двумя способами: по 81 и 49 либо по 121 и 9. Разумеется, в любом построении должны участвовать все солдаты армии.

Решения

1. Вычтем каждое число из всех остальных, и получим 358 (дважды: 1059 − 701 = = 358 и 1417 − 1059 = 358), 716 (1417 − − 701 = 716), 1 611 (2312 − 701 = 1611), 1 253 (2312 − 1059 = 1253) и 895 (2312 − − 1417 = 895). Итак, 358 равно 2 × 179, поэтому единственный возможный общий делитель, для которого остаток от деления в любом случае будет равен нулю, — это 179. Методом проб и ошибок получим, что 179 удовлетворяет условиям задачи. Поэтому именно 179 — искомое число, и для всех чисел, указанных в задаче, остаток от деления на него будет равен 164.

2. Ниже приведен ответ, удовлетворяющий всем условиям задачи:

A = 4	B = 3364	C = 6724
D = 2116	E = 5476	F = 8836
G = 9409	H = 12769	I = 16129

Каждое из этих чисел является квадратом для следующих чисел (в алфавитном порядке): 2, 58, 82, 46, 74, 94, 97, 113 и 127. Во всех случаях разность между *A* и *B*, *B* и *C*, *D* и *E* и так далее равна 3360.

3. Чтобы монеты нельзя было разделить на равные столбики (одну монету нельзя считать столбиком), нужно, чтобы их число было простым. Если банкир получит простое число, он победит. Сейчас я покажу, как это можно сделать простым способом вне зависимости от того, сколько монет положит в ящик клиент, то есть чтобы банкир всегда выигрывал.

Сначала банкир должен положить 40 монет, затем, вне зависимости от того, сколько добавит клиент, попросить его добавить в ящик квадрат от того числа монет, которое он только что положил, уменьшенного на единицу. Так, банкир положит 40 монет, клиент добавит, например, 6, затем 25 (5 в квадрате). В результате в ящике будет лежать 71 монета — простое число. Попробуем еще раз. Банкир кладет 40 монет, клиент добавляет 12, затем 121 (11 в квадрате), в результате в ящике будет лежать 173 монеты — снова простое число.

Ключ к решению задачи — следующий любопытный факт: если прибавить к любому числу, не превышающему 39, его квадрат и увеличить сумму на 41, то результат будет простым числом. Первым это обнаружил великий математик Эйлер.

Можно предложить другое решение: банкир должен попросить клиента добавить столько монет, чтобы в результате в ящике оказалось определенное число монет. Но это не просто делает задачу абсурдной, но и нарушает правило о том, что ни один из игроков не должен знать, сколько монет положил другой.

4. Наименьшие простые числа, которые можно представить в виде $4n + 1$, — это 5, 13, 17, 29 и 37; наименьшие, которые можно представить в виде $4n - 1$, — это 3, 7, 11, 19 и 23. Таким образом, простые числа из первой группы всегда можно представить в виде суммы двух квадратов единственным способом. Так, 5 = 4 + + 1; 13 = 9 + 4; 17 = 16 + 1; 29 = 25 + 4; 37 = 36 + 1. Но простые числа из второй группы никак нельзя представить в виде суммы двух квадратов. Чтобы число можно было представить в виде суммы двух квадратов разными способами, необходимо, чтобы это число имело определенное количество простых сомножителей из первой группы. Так, 5 или 13 — единственные числа, которые можно представить одним способом. Однако 65 (5 × 13) можно представить двумя способами; 1105 (5 × 13 × 17) — четырьмя; 32405 (5 × 13 × × 17 × 29) — восемью способами. Таким образом, для каждого нового множителя, который мы добавим, число способов удваивается. Обратите внимание, что я говорю «новый множитель», поскольку повторное умножение на один и тот же множитель подчиняется другому закону. Мы не можем выразить 25 (5 × × 5) двумя способами, только одним. Однако 125 (5 × 5 × 5) можно представить двумя способами, равно как и 625 (5 × 5 × 5 × 5). Но если мы добавим еще один множитель 5, то сможем представить результат в виде суммы двух квадратов тремя разными способами.

Если простое число из второй группы будет множителем искомого числа, то это число не сможет быть суммой двух квадратов. Так, 15 (3 × 5) не подходит, 135 (3 × 3 × 3 × 5) — тоже. Но если 3 встретится среди сомножителей четное число раз, то всё изменится: эти тройки сами образуют квадрат и мы получим решение, но только одно. Так, 45 (3 × 3 × 5 или 9 × 5) = 36 + 9. Аналогично может использоваться множитель 2 либо 2 в любой степени, например, 4, 8, 16, 32. Однако его использование будет влиять на число решений, за исключением случаев, подобных 50, когда квадрат удваивается и мы получаем два ответа: 49 + 1 и 25 + 25.

Как только мы разложим число на простые множители, мы сразу же сможем определить, можно ли разложить это число на два квадрата. Если это возможно, то найти все возможные варианты разложения очень просто, и это легко можно сделать в уме. Я упомянул число 130. Нетрудно видеть, что оно равно 2 × 5 × 13. Так как 65 можно представить двумя способами (64 + 1 и 49 + 16), то 130 также можно представить двумя способами, так как множитель 2 не влияет на ответ.

Наименьшее число, которое можно представить в виде суммы двух квадратов двенадцатью разными способами, равно 160 225. Именно столько солдат содержит наименьшая по размерам армия, удовлетворяющая условиям задачи.

Это число равно произведению 5 × 5 × 13 × 17 × 29. Каждый из множителей этого произведения принадлежит к требуемой группе. Если бы все множители были различны, то число способов равнялось бы шестнадцати, но так как один из множителей повторяется, то способов всего двенадцать. Двенадцать пар — это 400 и 15, 399 и 32, 393 и 76, 392 и 81, 384 и 113, 375 и 140, 360 и 175, 356 и 183, 337 и 216, 329 и 228, 311 и 252, 265 и 300. Если мы возведем в квадрат числа из каждой пары, после чего сложим их, то для каждой пары эта сумма будет равна 160 225.

Льюис Кэрролл

Запутанный рассказ

Узелок VII. Мелкие расходы

Раб, который
еще должен платить.
Какая низость!

— Тетя Математильда!

— Что, милая?

— Не могли бы вы записать расходы сразу? Если вы их сейчас не запишете, я непременно забуду.

— Подожди хотя бы, пока кэб остановится. Не могу же я писать, когда так трясет!

— Ну, тетя, пожалуйста! А то я действительно забуду.

В голосе Клары зазвучали просительные нотки, против которых тетушка не могла устоять. Достав со вздохом свой блокнот — несколько табличек небольшого формата из слоновой кости, — она приготовилась внести в него те суммы, которые Клара только что израсходовала в кондитерской. Платила за все, разумеется, тетушка, но бедная девочка отлично знала, что рано или поздно Безумная Математильда потребует от нее подробный отчет о каждом израсходованном пенсе, и поэтому сейчас с плохо скрываемым нетерпением ждала, пока тетушка найдет среди своих табличек ту, которая была озаглавлена «Мелкие расходы».

— Вот она, — сказала наконец тетушка. — Последняя запись относится к вчерашнему завтраку. Один стакан лимонада (почему ты не можешь пить простую воду, как я?), три бутерброда (горчицы, конечно, в них нет и в помине!) и семь бисквитов. Итого 1 шиллинг и 2 пенса (1 шиллинг содержит 12 пенсов. — *прим. перев.*). Итак, что ты заказывала сегодня?

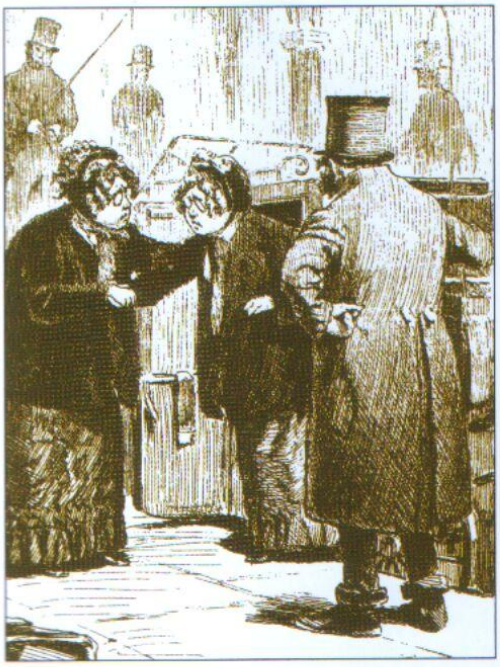
— Один стакан лимонада… — начала было перечислять Клара, но тут кэб неожиданно остановился, и стоявший у входа в вокзал швейцар с отменными манерами помог растерявшейся девочке выйти из экипажа прежде, чем она успела закончить фразу.

Тетушка немедленно захлопнула свой блокнот и начала рассчитываться с кэбменом, отдавать подробнейшие и пространнейшие распоряжения относительно багажа, не обращая никакого внимания на мольбы несчастной племянницы записать и остальную часть расходов на завтрак.

— Милая моя, да тебе и впрямь следует развивать свою память, чтобы она стала более емкой — таково было единственное изречение, которым тетушка соблаговолила утешить свою племянницу. — Неужели скрижали твоей памяти недостаточно широки для того, чтобы удержать расходы на один-единственный завтрак?

— Конечно, недостаточно! И вполовину не так широки, как надо бы! — послышался возмущенный ответ.

Слова вполне подходили по смыслу, но произнесший их голос не был голосом Клары. Тетя и племянница в удивлении обернулись, чтобы посмотреть, кто это внезапно вмешался в их разговор.



▲ *Эта дверь и вполовину не так широка, как должна была бы быть!*

Толстенькая старушка суетилась у дверцы, помогая кэбмену извлечь из глубины экипажа свою точную копию.

— Говорю вам: эта дверь и вполовину не так широка, как должна была бы быть! — повторила старушка, когда ее сестра была наконец извлечена из кэба.

— Не правда ли, девочка? — обратилась она за поддержкой к Кларе, тщетно пытаясь грозно нахмуриться.

— Некоторые пассажиры слишком широки для кэба, — проворчал возница.

— Не выводите меня из себя! — воскликнула старушка, охваченная тем, что у нее должно было означать приступ ярости. — Еще одно слово, и я привлеку вас к ответственности за нарушение *Habeas Corpus* (начальные слова закона о неприкосновенности личности, принятого английским парламентом в 1679 г. — *прим. перев.*).

Кэбмен прикоснулся к шляпе и отошел улыбаясь.

— Чтобы поставить на место зарвавшегося грубияна, моя милая, лучше всего сослаться на какой нибудь пусть даже плохонький закон, — доверительно заметила старушка, обращаясь к Кларе. — Ты видела, как он сразу струсил, когда я упомянула *Habeas Corpus*? Хотя я и не имею ни малейшего понятия о том, что это значит, но звучит все равно здорово, правда?

— Мне как то не по себе от этого *Habeas Corpus*, — несколько туманно возразила Клара.

— Еще бы, — воскликнула старушка. — Нас и вывели из себя, не так ли, сестрица?

— Никогда в жизни я не была так выведена из себя! — подтвердила, лучезарно улыбаясь, более толстая сестра.

Только теперь Клара узнала в сестрах старушек, с которыми познакомилась в картинной галерее. Отведя в сторону тетушку, она торопливо прошептала ей на ухо:

— Я впервые встретилась с ними в Королевской академии изобразительных искусств. Они были так любезны со мной, а сегодня они завтракали за соседним столом. Они пытались помочь мне найти картину, которую я искала. По-моему, они очень симпатичные старушки!

— Так ты говоришь, что это твои друзья? — переспросила Безумная Математильда. — Ну что ж, они производят приятное впечатление. Можешь побеседовать с ними, пока я куплю билеты. Постарайся только следить за своей речью и располагать мысли в более строгом хронологическом порядке!

Вскоре все четверо — две сестры и тетушка с племянницей — сидели на одной скамейке и в ожидании поезда вели непринужденный разговор, словно уже давно знали друг друга.

— Какое замечательное совпадение! — воскликнула та из сестер, что была поменьше ростом и поразговорчивей (именно ее познания в юриспруденции обратили в бегство кэбмена). — Мы не только ждем один и тот же поезд на одном и том же вокзале — что достаточно любопытно само по себе, — но и ждем в один и тот же день и в один и тот же час! Это меня особенно поражает!

— Эти совпадения не являются независимыми, — начала было Безумная Математильда, но Клара рискнула прервать ее.

— Здесь не трясет, — умоляюще сказала она. — Может быть, мы запишем расходы?

Таблички слоновой кости снова были извлечены на свет.

— Итак, что мы заказывали? — спросила тетушка.

— Стакан лимонада, один бутерброд, один бисквит. Ой, что же мне делать? — с отчаянием в голосе вдруг воскликнула Клара.

— У тебя что, зубы разболелись? — спокойно спросила тетушка, записывая названное Кларой меню.

— Нет! — удрученно сказала Клара. — Просто я не могу вспомнить, сколько истратила на завтрак.

— Постарайся вычислить, если не помнишь, — предложила тетушка. — Что ты заказывала на завтрак вчера, тебе известно. А вот запись о том, что ты заказывала позавчера — в первый день, когда мы отправились завтракать в кондитерскую: один стакан лимонада, четыре бутерброда, десять бисквитов. Итого 1 шиллинг и 5 пенсов.

С этими словами тетушка передала свои таблички Кларе. Сквозь слезы Клара даже не сразу разглядела, что держит таблички вверх ногами.

Две сестры с глубочайшим интересом прислушивались к разговору между тетей и племянницей. Видя, что Клара очень расстроена, меньшая из сестер ласково положила ей руку на плечо.

— Знаешь, деточка, — сказала она успокаивающе, — мы с сестрой находимся в таком же затруднительном положении! Ну, просто точь-в-точь в таком же! Дело в том, деточка, что мы сегодня завтракали в той же кондитерской, где завтракали вы с тетей, и заказали два стакана лимонада, три бутерброда и пять бисквитов, но ни одна из нас не имеет ни малейшего понятия о том, сколько мы заплатили. Правда, сестрица?

— Совершенно и абсолютно... — пробормотала вторая старушка.

— Ты сосчитаешь для нас, сколько мы заплатили? — попросила Клару первая старушка.

— Надеюсь, ты не забыла арифметику? — с легким беспокойством спросила тетушка. Клара рассеянно перебирала таблички, тщетно пытаясь собраться с мыслями. В голове у нее было пусто.

Наступило угрюмое молчание.

(Перевод Ю. А. Данилова, публикуется с сокращениями.)

Решение

Задача

Стакан лимонада, 3 бутерброда и 7 бисквитов стоят 1 шиллинг 2 пенса. Стакан лимонада, 4 бутерброда и 10 бисквитов стоят 1 шиллинг 5 пенсов. Найти, сколько стоят: 1) стакан лимонада, бутерброд и бисквит; 2) 2 стакана лимонада, 3 бутерброда и 5 бисквитов.

Ответ

1) 8 пенсов;
2) 1 шиллинг 7 пенсов.

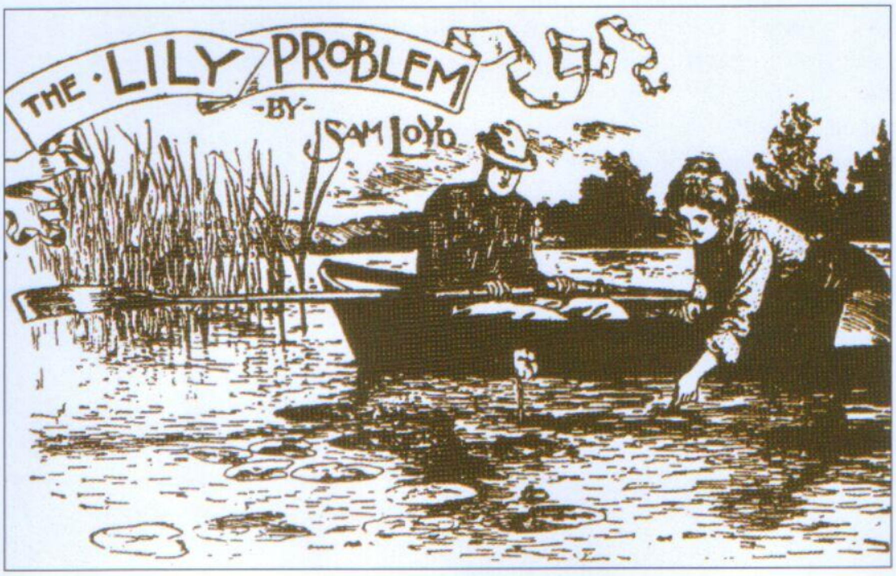
Решение

Эту задачу лучше всего решать алгебраически. Пусть x — стоимость (в пенсах) одного стакана лимонада, y — стоимость бутерброда и z — бисквита. Тогда по условию задачи $x + 3y + 7z = 14$, $x + 4y + 10z = 17$. Требуется вычислить, чему равны $x + y + z$ и $2x + 3y + 5z$. Располагая лишь двумя уравнениями, мы не можем найти значение каждого из трех неизвестных в отдельности, но вычислить значения некоторых комбинаций неизвестных в наших силах. Известно также, что с помощью двух данных уравнений мы можем исключить два из трех неизвестных, после чего искомые выражения будут зависеть лишь от одного неизвестного. Значения искомых выражений могут быть вычислены лишь в том случае, если единственное неизвестное, оставшееся неисключенным, само собой уничтожается. В противном случае задача не имеет решения.

Исключим лимонад и бутерброды и сведем все к бисквитам. Для этого вычтем первое уравнение из второго, исключив тем самым лимонад, и получим $y + 3z = 3$. Подставляя $y = 3 - 3z$ в первое уравнение, получим $x - 2z = 5$ или, что то же, $x = 5 + 2z$. Если теперь мы подставим выражения для x и y в те выражения, значения которых нам необходимо вычислить, то первое из них превратится в $(5+2z)+(3-3z)+z=8$, а второе — в $2\times(5 + 2z) + 3\times(3 - 3z) + 5z = 19$. Следовательно, стоимость первого набора составляет 8 пенсов, а второго — 1 шиллинг 7 пенсов. Изложенный нами метод универсален. Иными словами, он абсолютно во всех случаях позволяет либо получить ответ, либо доказать, что решения не существует.

Лучшее от Сэма Лойда

Озера, реки и мосты



▲ *Какова глубина озера?*

1. Задача о водяных лилиях

Поэт Генри Лонгфелло был хорошим математиком и считал, что задачи следует излагать красивым и образным языком, чтобы пробудить фантазию ученика, а не использовать сухие фразы из учебников.

Задача о водяных лилиях — одна из многих, представленных Лонгфелло в его романе «Кавана». Она очень проста. Любой сможет решить ее, даже не обладая знаниями математики или геометрии, но в этой задаче используется важный геометрический закон, который вы обязательно запомните. Не смогу дословно воспроизвести рассказ самого Лонгфелло, но речь шла о водяной лилии, растущей в озере. Цветок находится в одной пяди от поверхности воды, и когда ветерок наклоняет его, он касается воды на расстоянии двух локтей. Зная только эти данные, можно рассчитать глубину озера.

Допустим, что, как показано на рисунке, лилия возвышается над поверхностью воды на 10 дюймов. Если наклонить цветок в сторону так, чтобы он скрылся под водой, то его верхушка будет отстоять от исходной точки на 21 дюйм.

Какова глубина озера?

2. Задача о кенигсбергских мостах

Эта занимательная задача интересна не только потому, что на ней основана целая математическая теория, но и потому, что это очень старая задача и с ней связана одна любопытная история. Кенигсберг, вторая столица Пруссии, был разделен рекой Прегель на четыре района, включая остров Кнайпхоф, так, как показано на рисунке. Части города соединены восемью мостами. С этими мостами и связана задача, над которой 200 лет бились жители Кенигсберга.

Молодежь всегда любила прогулки по кенигсбергским мостам. В старинных рассказах в том или ином виде упоминается задача обхода всех мостов. Считалось, что обойти все мосты, не проходя ни по одному из них дважды, невозможно.

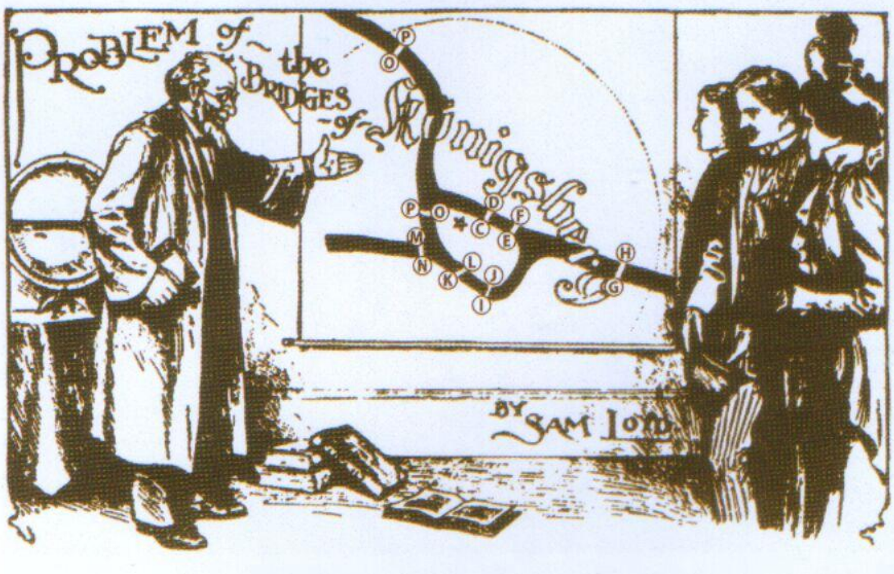
Достоверно известно, что группа молодых людей в 1735 году обратилась к математику Леонарду Эйлеру, чтобы тот помог им решить задачу. Год спустя Эйлер представил объемный труд в Петербургскую академию наук.

В нем он доказывал, что задача не имеет решения. Об этом говорится в бюллетене Академии наук за 1741 год, том 8. Труд Эйлера был опубликован известными математиками на английском и французском языках, но в нем изначально идет речь о задаче с любым числом мостов.

Профессор Тринити-колледжа Вальтер Вильям Роуз Болл рассказывает о достоинствах этой старинной задачи в своей книге «Математические развлечения». Он ошибочно приписывает авторство задачи Эйлеру, датируя ее 1736 годом, и вносит важное уточнение: в Кенигсберге было (и сейчас есть, если верить путеводителю Бедекера) семь мостов. В архивах упоминается восемь мостов, и на нашей карте приведена схема из исправленного путеводителя Бедекера, где говорится о восьми мостах. В 1735 году Эйлер был еще очень молод, а известность пришла к нему почти 50 лет спустя. Возможно, этим объясняются и другие неточности в задаче. Так, по условию задачи совершенно не обязательно возвращаться в исходную точку. Нужно лишь доказать возможность обойти город, пройдя по каждому из мостов только один раз.

От читателя требуется определить, сколькими способами это можно сделать и какой путь является кратчайшим.

▼ *Сколько всего путей и какой из них кратчайший?*



3. Четверо беглецов

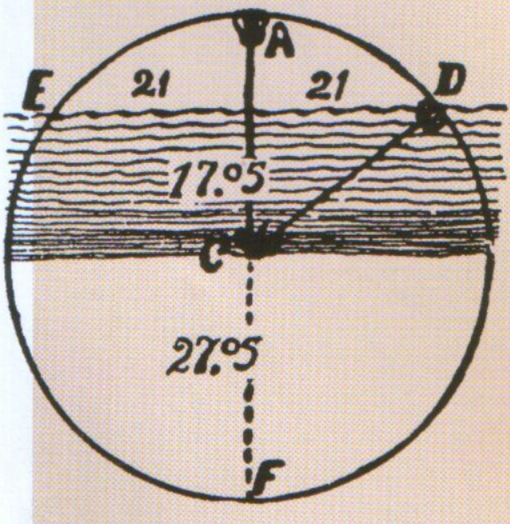
Разумеется, всем любителям головоломок знакома старинная задача о волке, козе и капусте, которых нужно перевезти на другую сторону реки, причем за один раз в лодке могут поместиться только два из названных персонажей. История четырех беглецов столь же старинная и основана на том же принципе, но настолько запутанна, что правильный ответ, кажется, упустили из виду все математики, занимавшиеся этой задачей.

Согласно условию, четверо мужчин сбежали со своими любовницами, но по пути им потребовалось перебраться через реку. В лодке могли разместиться только два человека. Посередине реки, как показано на рисунке, находится небольшой остров. Все молодые люди были очень ревнивы: они не могли допустить, чтобы их любимая даже на мгновение осталась без них в обществе другого мужчины или нескольких мужчин. Ни один из них также не мог сесть в лодку, если на берегу или на острове оставалась в одиночестве девушка, которая при этом не была их возлюбленной. Это заставляет нас предполагать, что девушки были не менее ревнивы и подозревали, что их любовники сбегут с другой при первой же возможности. Суть задачи — помочь беглецам как можно быстрее переправиться через реку. Предположим, что река имеет 200 ярдов в ширину, а на острове посередине реки могут поместиться все беглецы. Сколько раз лодка должна пересечь реку, чтобы все беглецы переправились на другой берег?

▲ *Помогите четырем ревнивым парам переправиться через реку.*

Решения

1. Евклид писал: «Когда две хорды дуги пересекаются внутри круга, произведение частей одной хорды равно произведению частей другой». На рисунке поверхность воды представляет собой хорду дуги. Так как части этой хорды равны 21 дюйму, то их произведение равно 441 дюйму. Лилия образует другую хорду. Часть цветка, которая возвышается над водой, является частью хорды. Следовательно, эта часть длиной в 10 дюймов при умножении на другую часть этой хорды должна давать 441 дюйм. Разделив 441 на 10, получим длину второй части хорды — 44,1 дюйма. Сложив 10 и 44,1, получим 54,1 — длину хорды AF, которая является диаметром круга. Чтобы получить радиус, нужно разделить этот отрезок пополам. Получим 27,05 дюйма. Так как цветок возвышается над поверхностью воды на 10 дюймов, нужно вычесть эти 10 дюймов из радиуса, чтобы узнать глубину озера. Она равна 17,05 дюйма.



2. Существует 416 возможных решений этой задачи. Кратчайшим путем является O-P, D-C, E-F, H-G, I-J, L-K, N-M и A-B (или наоборот). Так как существует несколько миллионов неверных решений, эти 416 вариантов было легко упустить из виду.

(Читателю не стоит воспринимать всерьез комментарии Лойда в адрес Эйлера. Лойд прекрасно знал, что Эйлер занимался решением задачи о семи мостах, и в его знаменитой работе содержалось решение первой топологической задачи.)

3. Задачу можно решить за 17 ходов.

Обозначим мужчин буквами ABCD, девушек — abcd. Изначально все они находятся на берегу. Решение приведено в таблице и не требует пояснений.

	Берег	Остров	Другой берег
1.	ABCDcd	o	ab
2.	ABCDbcd	o	a
3.	ABCDd	bc	a
4.	ABCDcd	b	a

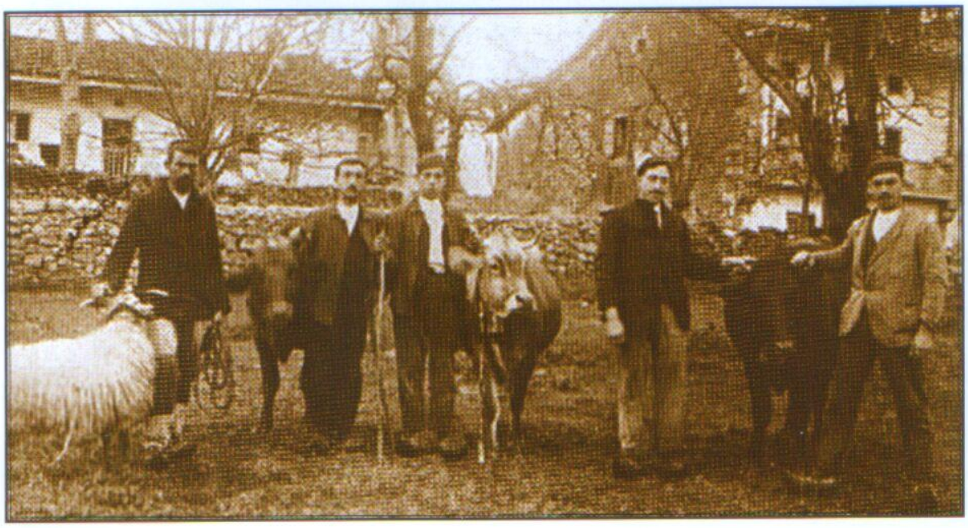
(Мужчины начинают переправляться через реку.)

	Берег	Остров	Другой берег
5.	CDcd	b	AB a
6.	BCDcd	b	Aa
7.	BCD	bcd	Aa
8.	BCDd	bc	Aa
9.	Dd	bc	ABCa
10.	Dd	abc	ABC
11.	Dd	b	ABCac
12.	BDd	b	ACac
13.	d	b	ABCDac
14.	d	bc	ABCDa
15.	d	o	ABCDabc
16.	cd	o	ABCDab
17.	o	o	ABCDabcd

Лучшее от Генри Э. Дьюдени

Задачи о деньгах

Не основывай свою уверенность на деньгах, а лучше храни их в надежном месте.
Оливер Уэнделл Холмс



▲ *Сколько животных привели на рынок Джейкс, Ходж и Дюрант?*

1. На рынке

Трое крестьян встретились на рынке, куда пришли продавать скот.

— Смотри, — сказал Ходж Джейксу, — я дам тебе шесть моих свиней за одну из твоих лошадей, и у тебя станет в два раза больше животных, чем у меня.

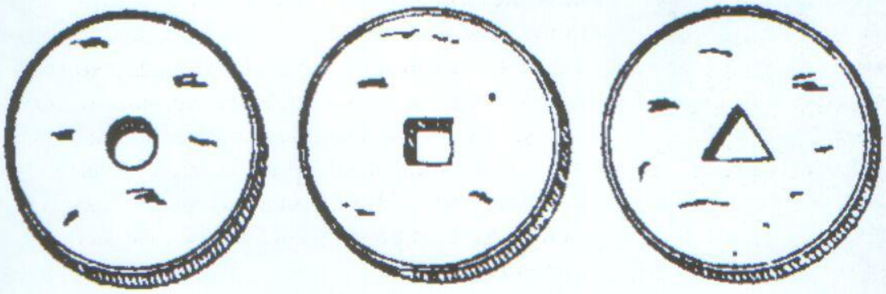
— Если ты хочешь вести дело так, — сказал Дюрант Ходжу, — я дам тебе четырнадцать овец за одну лошадь, и у тебя окажется в три раза больше животных, чем у меня.

— Я не остановлюсь на этом, — сказал Джейкс Дюранту. — Я дам тебе четырех коров за одну лошадь, и у тебя будет в шесть раз больше животных, чем у меня.

Несомненно, это очень примитивный способ торговли, но было бы интересно узнать, сколько же животных изначально было у Джейкса, Ходжа и Дюранта.

2. Китайские деньги

Китайцы — странный народ: многое они делают наоборот. Говорят, что они не надавливают на пилу, как мы, а пилят с нижней стороны и тянут пилу вверх, и что они работают рубанком не «от себя», а «к себе». Еще говорят, что сначала они сооружают крышу, а уж потом достраивают снизу дом. Китайские деньги называются «лян», и их ценность постоянно меняется. Лян с каждым разом становился все тоньше, и в итоге стопка из 2000 лян стала иметь в высоту меньше трех дюймов. В обращении находятся монеты разной толщины с круглыми, квадратными или треугольными дырками посередине, как показано на рисунке.



Их надевают на нить, как пуговицы. Допустим, что 11 монет с круглой дырой стоят 15 чинг-чангов, 11 монет с квадратной дырой стоят 16 чинг-чангов, а 11 монет с треугольной дырой стоят 17 чинг-чангов. Как я могу разменять 30 пенсов, используя только монеты этих трех видов? Один чинг-чанг стоит ровно 2 пенса и четыре пятнадцатых чинг-чанга.

3. Домашняя бухгалтерия

Юная госпожа Перкинс Патни написала мне: «Я была бы очень признательна, если бы вы помогли мне решить одну задачу, которая в последнее время очень беспокоит меня. Мы с мужем недавно обвенчались. Спустя два года после того как мы поселились в нашем доме, муж сказал, что истратил треть годового дохода на арендную плату, взносы и налоги, половину — на домашние расходы, а девятую часть — на другие расходы. У него осталось 190 фунтов в банке. Последнее я знаю точно. Как-то раз он забыл дома свою записную книжку и я мельком взглянула в нее. Разве вам не кажется, что муж должен полностью доверять жене во всем, что касается денег? Я считаю, что должен, но сколь бы невероятным это ни казалось, он никогда не говорил мне, насколько выросли его доходы. Естественно, я хочу это проверить. Можете ли вы объяснить мне, как выросли его доходы, зная цифры, которые я вам сообщила?»

Разумеется, данных, указанных госпожой Перкинс, вполне достаточно, чтобы решить задачу. И почти все мои читатели, если будут действовать невнимательно, назовут мне число, во много раз превышающее верный ответ.

4. Покупка яблок

Покупать яблоки понемногу всегда непросто, и мне кажется уместным привести некоторые наблюдения по этому поводу. Все мы знаем историю о смышленом парнишке, который, узнав, что торговка продает четыре яблока за три пенни, сказал: «Вот это да! Четыре яблока за три пенни! Значит, три отдают за два пенни, два яблока — за одно, одно — бесплатно. Возьму одно!»

Это не единственный случай, который может сбить вас с толку. Например, как-то раз ребенок взял яблоко ценой в один пенни, но когда узнал, что груши идут по той же цене, поменял яблоко на грушу и собрался уходить.

— Постой! — сказала ему торговка. — Ты не заплатил за грушу!

— Конечно же нет, — ответил мальчик. — Взамен я дал вам яблоко.

— Но ты не заплатил за яблоко!

— Боже мой! Вы хотите, чтобы я заплатил и за яблоко, и за грушу?

И пока пожилая торговка пыталась вникнуть во все эти хитросплетения, мальчик исчез.

В нашей задаче некий человек дал мальчику шесть пенсов и пообещал дать еще, если тот превратит шесть пенсов в девять. Малыш вернулся спустя пять минут.

— У меня получилось превратить шесть пенсов в девять, — сказал он, протягивая три пенса своему благодетелю.

— Как у тебя это вышло? — спросил он.

— Я купил яблок на три пенса.

— Но откуда же у тебя появилось девять пенсов?

— Очень просто, — ответил ребенок. — Торговка яблоками получила три пенса, верно? У меня есть яблоки ценой в три пенса, и я только что дал вам еще три пенса. Разве в сумме не получается девять?

Малыша определенно следует научить правильно покупать яблоки. Я предлагаю читателю простую задачу на эту же тему.

Торговка продавала яблоки трех сортов: одно яблоко первого сорта за 1 пенни, два яблока второго сорта за 1 пенни и три яблока третьего сорта за 1 пенни. Разумеется, два яблока второго сорта и три яблока третьего сорта были равны по размерам одному яблоку первого сорта. Некий джентльмен, у которого было поровну сыновей и дочерей, дал им семь пенсов, чтобы они купили яблок на всех. Нужно разделить купленные яблоки поровну между всеми детьми. Как правильно потратить семь пенсов, и сколько всего детей было у джентльмена?

Решения

1. У Джейкса было 7 животных, у Ходжа — 11, у Дюранта — 21. Всего 39 животных.

2. Так как один чинг-чанг стоит ровно 2 пенса и четыре пятнадцатых чинг-чанга, одиннадцать пятнадцатых чинг-чанга должны стоить 2 пенса. Значит, 11 чинг-чангов стоят ровно 30 пенсов. Для размена понадобится семь монет с круглым отверстием и одна монета с квадратным отверстием. Заметим, что 7 монет с круглым отверстием стоят семь одиннадцатых от 15 чинг-чангов, а одна монета с квадратным отверстием стоит одну одиннадцатую от 16 чинг-чангов. Получается, что 77 монет с круглыми отверстиями равны 105 чинг-чангам, а 11 монет с квадратными отверстиями равны 16 чинг-чангам. Значит, 77 «круглых» монет плюс 11 «квадратных» равны 121 чинг-чангу; 7 «круглых» монет плюс 1 «квадратная» равны 11 чинг-чангам, или 30 пенсам. На практике эти расчеты куда проще, чем может показаться из наших объяснений.

3. Если бы я не оговорил это особо, читатели единогласно сказали бы, что доходы господина Перкинса равны 1710 фунтам, что совершенно неверно. Госпожа Перкинс пишет: «Мы потратили треть его годового дохода на аренду и прочее», то есть за два года они потратили некую сумму, равную трети его годового дохода. Обратите внимание: она говорит, что эта сумма тратилась не ежегодно, а за два года. Если внимательно прочитать ее объяснения, то мы получим единственно возможный ответ: доходы ее мужа составляли 180 фунтов. Так, траты за два года, в течение которых доход мужа возрос до 360 фунтов, составили 60 фунтов на аренду и прочее, 90 — на домашние расходы, 20 — на остальное, и в банке осталось 190 фунтов.

4. Так как у джентльмена было поровну сыновей и дочерей, очевидно, что число детей четное. В зависимости от того, насколько внимательно мы прочитаем текст задачи, возможны три разных ответа. Детей могло быть 2, 6 или 14. В первом случае яблоки можно купить десятью разными способами. Но в этом случае в задаче не говорилось бы о «сыновьях и дочерях», потому что про сына и дочь нельзя сказать «сыновья и дочери». Поэтому такой вариант исключается. Если детей четырнадцать, то единственно возможный способ — дать каждому яблоко ценой в половину пенни. Но каждый ребенок должен получить поровну «яблок», то есть яблок, очевидно, было несколько. Таким образом, этот вариант также исключается. Вернемся к третьему случаю, который удовлетворяет всем заданным условиям. Три мальчика и три девочки получат по 1 яблоку ценой в половину пенни и по 2 яблока ценой в треть пенни. Стоимость этих 3 яблок равна одному и одной шестой пенни. Умножив это число на шесть, мы получим семь пенсов. Следовательно, ответ будет таким: шестеро детей, три мальчика и три девочки.

Льюис Кэрролл
Запутанный рассказ

Узелок 8
О загадке омнибуса

Этот поросенок отправился на рынок;
Этот поросенок остался дома.

— По повелению Ее Блистательства, — сказал губернатор, провожая путешественников с последней Высочайшей аудиенции, — я буду иметь несравненное удовольствие проводить вас до наружных ворот Военного плаца, на котором должна произойти агония прощания. Грурмстиптсы отправляются от ворот каждые четверть часа в обе стороны.

— Простите, не могли бы вы повторить это слово? — попросил Норман. — Грурм... Как дальше?

— Грурмстиптсы, — повторил губернатор. — У себя в Англии вы называете их омнибусами. Они отправляются в обе стороны, и на любом из них вы сможете добраться до порта.

Пожилой путешественник с облегчением вздохнул. Четырехчасовая придворная церемония утомила его: он все время боялся допустить какую-нибудь оплошность, которая привела бы в действие десять тысяч бамбуковых палок (сверх обычной нормы).

Через минуту наши знакомые вышли на огромный четырехугольный плац, вымощенный мрамором. Четыре свинарника, возведенные по углам, радовали глаз изяществом пропорций. Солдаты, державшие на руках поросят, маршировали по плацу во всех направлениях. В центре плаца стоял офицер огромного роста и громовым голосом, перекрывавшим поросячий визг, отдавал приказания.

— Верховный Главнокомандующий! — поспешно прошептал губернатор своим спутникам, которые последовали его примеру и простерлись ниц перед великим человеком.

Главнокомандующий мрачно поклонился в ответ. С головы до ног он был расшит золотыми галунами. На лице отважного воина застыло выражение глубокой скорби. Под мышкой Главнокомандующий держал черного поросенка. Отдавая ежеминутно приказания солдатам, доблестный защитник Кговджни все же ухитрился выкроить время, чтобы в отменных выражениях попрощаться с отъезжающими гостями.

— Прощай, о старый чужестранец!.. Этого жирного поросенка положить поверх других поросят в западном свинарнике!.. Пусть ваши тени никогда не станут короче!.. Горе мне! Опять не так! Очистить все свинарники и начать сначала!

И закаленный в боях воин, опершись на меч, смахнул слезу.

— Он в глубоком отчаянии, — пояснил губернатор, когда наши путешественники покинули плац. — Ее Блистательство повелела ему разместить в четырех угловых свинарниках 24 поросенка так, чтобы при обходе плаца число поросят в очередном свинарнике неизменно оказывалось ближе к 10, чем число поросят в предыдущем.

— Считает ли Ее Блистательство, что 10 ближе к 10, чем 9? — спросил Норман.

— О да! — подтвердил губернатор. — Ее Блистательство не только считает, что 10 ближе

▼ *«Очистить все свинарники и начать сначала!»*

к 10, чем 9, но и выражает уверенность в том, что 10 ближе к 10, чем 11.

— Тогда, я полагаю, поросят можно разместить требуемым образом, — сказал Норман.

Губернатор покачал головой.

— В течение вот уже четырех месяцев Главнокомандующий только тем и занимается, что пробует расположить поросят в свинарниках то так, то этак, но — увы! — все его попытки ни к чему не привели, — заметил губернатор.

— Поросята, по-видимому, отнюдь не в восторге от этих бесконечных переездов, — заметил отец Нормана.

— Но ведь они переезжают лишь временно, — возразил губернатор. — В большинстве случаев их тотчас же отправляют обратно, стало быть, им нужно просто запастись терпением и не обращать внимания на переезды.

— Ее Блистательство, разумеется, намеревалась обойти все четыре свинарника лишь один раз? — спросил Норман.

— Увы, нет! — вздохнул провожатый. — Она намеревалась обойти их несколько раз, круг за кругом. Круг за кругом. Это собственные слова Ее Блистательства. Но... о горе, о агония расставания! Вот наружные ворота. Здесь мы должны проститься.

Губернатор зарыдал, с чувством пожал руки отцу и сыну и проворно зашагал назад.

— Мог бы хоть раз оглянуться на прощанье! — сказал отец с сожалением.

— И не начинать свистеть с того самого момента, как он повернулся к нам спиной, — сурово произнес сын. — Но посмотри! Эти две штуки... как их... кажется, отправляются!

▲ *«О горе, о агония расставания! Вот наружные ворота. Здесь мы должны проститься».*

К сожалению, в омнибусе, отправляющемся прямо в порт, свободных мест уже не было.

— Неважно! — беззаботно воскликнул Норман. — Пойдем по дороге, а следующий омнибус подберет нас.

Некоторое время отец и сын шли молча. Вдали показался шедший навстречу им омнибус. Когда он поравнялся с путешественниками, отец достал свои карманные часы.

— Прошло двенадцать с половиной минут с того момента, как мы отошли от наружных ворот дворца, — рассеянно заметил он. Внезапно скучное выражение его лица сменилось радостной улыбкой: отца озарила идея!

— Сын мой! — вскричал он, с такой силой кладя свою руку на плечо Норману, что на какое-то мгновенье вывел центр тяжести последнего за точку опоры.

— Что случилось? — поспешно спросил молодой человек, опасаясь, что отец его заболел.

— Когда следующий омнибус подберет нас?! Когда?! Когда?! — продолжал кричать отец, приходя во все большее и большее возбуждение.

Норман помрачнел.

— Минутку, — сказал он, — дай подумать.

Наступила тишина, нарушаемая лишь доносившимся издали визгом несчастных поросят, которых временно переносили из одного свинарника в другой под личным наблюдением Верховного Главнокомандующего.

(Перевод Ю. А. Данилова, публикуется с сокращениями.)

Решения

ПОРОСЯТА

Задача

Расположить 24 поросенка в четырех свинарниках так, чтобы при обходе свинарников по кругу число поросят в очередном свинарнике неизменно оказывалось ближе к 10, чем число поросят в предыдущем свинарнике.

Ответ

В первом свинарнике должно находиться 8 поросят, во втором — 10 и в четвертом — 6. Ничего не должно находиться в третьем свинарнике: он должен быть пуст. Совершаем контрольный обход свинарников. 10 ближе к 10, чем 8. Что может быть ближе к 10, чем 10? Ничто! Но именно «ничто» и находится в третьем свинарнике. Шесть ближе к 10, чем 0 (арифметический аналог «ничего»), 8 ближе к 10, чем 6. Условия задачи выполнены.

ОМНИБУСЫ

Задача

Из некоторого пункта в обе стороны каждые 15 минут отправляются омнибусы. Пешеход выходит из того же пункта в момент отправления омнибусов и встречает первый омнибус через 12 1/2 минут. Когда пешехода нагонит первый омнибус?

Ответ

6 1/4 минуты.

Решение

Пусть a — расстояние, проходимое омнибусом за 15 минут, а x — расстояние от пункта отправления до того места, где омнибус нагонит пешехода. Поскольку встреченный пешеходом омнибус прибывает в пункт отправления через 2 1/2 минуты после встречи, он за эти 2 1/2 минуты проезжает расстояние, на преодоление которого у пешехода ушло 12 1/2 минут. Следовательно, скорость омнибуса в 5 раз превышает скорость пешехода. Омнибус, который нагонит пешехода в тот момент, когда пешеход пускается в путь, находится на расстоянии a от пункта отправления. Следовательно, к тому моменту, когда путешественник проходит расстояние x, омнибус успевает проехать расстояние $a + x$. Учитывая соотношение скоростей, получаем $a + x = 5x$, то есть $4x = a$, откуда $x = a/4$. Это расстояние омнибус преодолевает за 15/4 минуты. Следовательно, пешеход проходит его за $5 \times 15/4$ минуты. Таким образом, омнибус нагоняет пешехода через 18 3/4 минуты после того, как тот отправился в путь, или (что то же) через 6 1/4 минуты после встречи с первым омнибусом.

• • •

Задачи на исследование операций

1. Задача об ожерелье

Воспользуюсь случаем, чтобы заметить: хотя мои задачи очень известны, это не означает, что всем известны ответы на них. Ответы на некоторые самые популярные задачи никогда не публиковались, и, насколько мне известно, они так и не были решены. В качестве примера я приведу задачу об ожерелье, о которой я писал несколько лет назад. Любой, кто прочтет ее, скажет, что ему не составит труда мгновенно найти решение. Однако я не припоминаю, чтобы кому-то удалось сразу дать правильный ответ. Цель этой простой задачи — показать, насколько ошибается обычный человек, когда пытается произвести какие-либо действия, требующие начальных знаний математики. Задача лишена каких бы то ни было ловушек или «пропущенных звеньев».

Я предлагал решить ее лучшим ювелирам Нью-Йорка, и они сказали, что не взяли бы на работу продавца, который не смог бы верно выполнить столь простую операцию, описанную в задаче. Тем не менее, никому из них не удалось дать верный ответ.

Некая дама купила 12 звеньев цепочки (они расположены по окружности рисунка, приведенного выше) и захотела изготовить из них одно ожерелье из 100 звеньев. Ювелир сказал ей, что разъединить и соединить заново маленькое звено стоит 15 центов, разъединить и соединить большое звено — 20 центов. Сколько должна заплатить дама за изготовление ожерелья?

▲ *Сколько должна заплатить дама за изготовление ожерелья?*

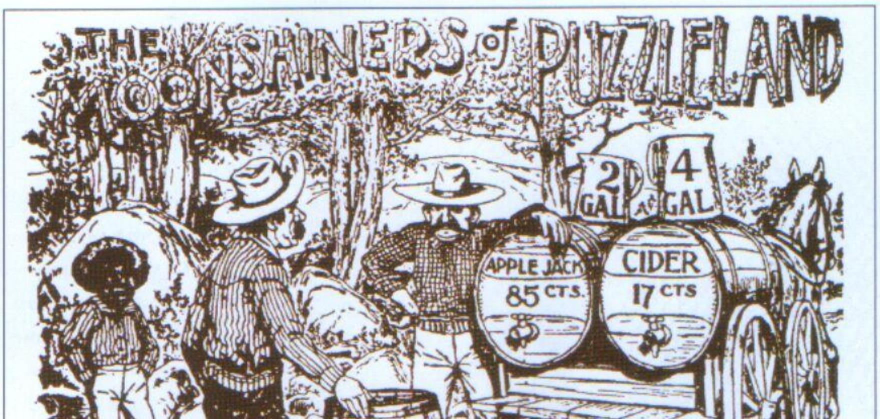
2. Продавцы напитков из страны головоломок

Разумеется, всем нам знакома задача о некоем человеке, который продавал бочку меда. Он нашел покупателя, который хотел купить четыре кварты меда, но у него с собой было только два бочонка — на три кварты и пять кварт. Отмерить четыре кварты в этой задаче очень просто, но куда сложнее определить наименьшее число переливаний, которыми можно решить эту задачу.

Эта всем известная задача подготовит вас к той головоломке, которую я намерен предложить. У продавца напитков есть бочка яблочной водки и бочка сидра емкостью по 31,5 галлона каждая. Нужно отмерить напитка Mountain Dew — смеси сидра и яблочной водки — ровно на 21 доллар 6 центов. У продавца есть мерные бочонки на 2 и 4 галлона, а покупателю нужно наполнить доверху бочку в 26 галлонов.

Определите, в какой пропорции нужно смешать сидр и водку, чтобы получить 26 галлонов Mountain Dew стоимостью ровно 21 доллар и 6 центов. Галлон яблочной водки стоит 85 центов, галлон сидра — 17 центов. Затем попытайтесь найти наименьшее число операций, которое нужно совершить, чтобы наполнить бочку покупателя.

▼ *Как продавцу отмерить напитка Mountain Dew ровно на 21 доллар и 6 центов?*



3. Враждующие супруги

В качестве предисловия к одной интересной задаче, в которой группе поссорившихся молодых людей нужно переправиться через реку в одной лодке, упомяну, что всем им известна задача о некоем крестьянине, которому нужно было переправить через реку волка, козу и капусту.

В нашем варианте задачи трем супружеским парам, возвращающимся с пикника, нужно пересечь реку в небольшой лодке. В лодке могут поместиться не более двух человек, при этом ни одна дама не умеет грести.

Случилось так, что приходской священник, проповедник Чинч, поссорился с двумя другими мужчинами в этой компании. В результате госпожа Чинч поссорилась с остальными дамами.

Как переправить супругов через реку так, чтобы никто из поссорившихся не оказался в одной лодке или на одном берегу реки? Еще одно любопытное условие задачи таково: ни один из джентльменов не должен оставаться на берегу одновременно с двумя дамами.

Нужно определить, сколько раз лодка должна пересечь реку, чтобы все супруги переправились на другой берег. Пользуясь случаем, добавлю, что никто не может решить эту задачу без помощи карандаша и бумаги, хотя научиться решать подобные задачи в уме можно очень быстро.

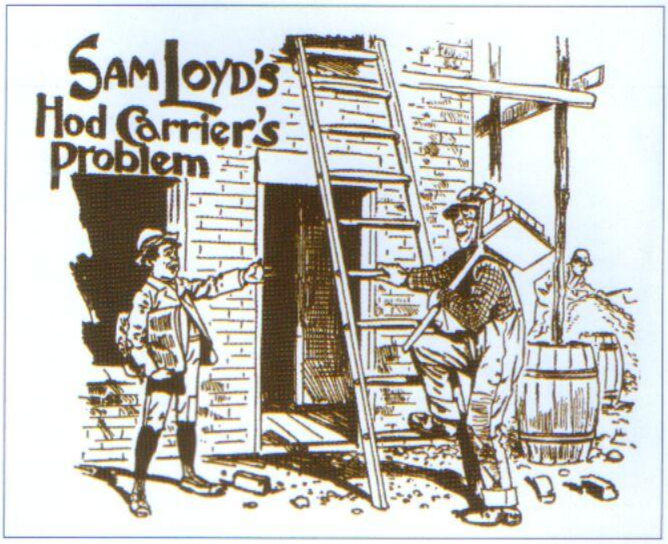
4. Носильщик кирпичей

Молодой человек, которого вы видите на рисунке, только что объяснил носильщику кирпичей эту весьма необычную задачу.

Начиная с земли, нужно попеременно подниматься и спускаться по лестнице, имеющей 9 ступеней, не пропуская ни одной из них. Подниматься и спускаться нужно так, чтобы коснуться земли еще только один раз; подняться на верхнюю ступеньку можно только два раза; и при этом нужно наступить на все остальные ступеньки одинаковое число раз.

Например, можно подняться до самого верха, спуститься на землю и снова подняться на самый верх: все условия задачи выполнены за 27 шагов. Суть задачи — определить, как можно выполнить все условия за наименьшее число шагов. Носильщику придется не раз подняться и спуститься по лестнице, прежде чем он найдет правильный ответ!

► *Объясните, как подняться по лестнице за наименьшее число шагов.*



Решения

1. 99% всех, кто пытается решить эту задачу, говорят, что наилучшим вариантом будет расковать 12 маленьких звеньев на концах 12 частей цепочки. Таким образом, стоимость работы составит 1 доллар 80 центов. Однако правильный ответ таков: нужно расковать десять звеньев в двух частях цепочки, имеющих по пять звеньев. Каждая из этих частей цепочки состоит из трех маленьких и двух больших звеньев. Если расковать все эти звенья и сковать их заново, чтобы получилось одно большое ожерелье, то это будет стоить всего 1 доллар и 70 центов. Это и будет ответом к задаче.

2. Старую задачу о том, как отмерить 4 кварты с помощью бочонков на 5 и 3 кварты, можно решить за 6 ходов:

1. Наполнить бóльший из бочонков.
2. Перелить мед из большого в малый бочонок. В большом останется 2 кварты.
3. Вылить содержимое малого бочонка в бочку.
4. Перелить две кварты из большого бочонка в малый.
5. Наполнить большой бочонок из бочки.
6. Наполнить малый бочонок из большого. Таким образом, в большом останется 4 кварты.

Во второй задаче с помощью элементарной алгебры нетрудно вычислить, что 26 галлонов Mountain Dew должны состоять из 24 и 8/17 галлона яблочной водки и 1 и 9/17 галлона сидра, чтобы полученный напиток стоил ровно 21 доллар и 6 центов при указанных ценах. Отмерить водку и сидр за наименьшее число действий можно так:

1. Наполнить оба бочонка яблочной водкой.
2. Перелить яблочную водку из бочки продавца в бочку покупателя.
3. Вылить содержимое обоих мерных бочонков в бочку, где была водка.
4. Перелить 2 галлона из бочки покупателя в бочку с яблочной водкой.
5. Перелить 2 галлона сидра из бочки продавца в бочку покупателя.
6. Наполнить оба мерных бочонка смесью из бочки покупателя. В бочке покупателя останется смесь, которая будет содержать 1 и 9/17 галлона сидра.
7. Наполнить бочку покупателя из бочки с яблочной водкой.

3. Чтобы все супружеские пары оказались на другом берегу, необходимо совершить 17 переправ:

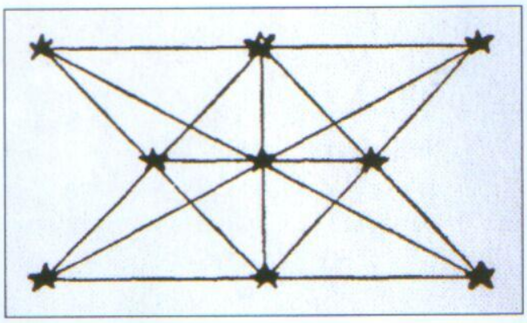
1. На другой берег переправляются господин и госпожа Ч.
2. Господин Ч. возвращается один.
3. Господин Ч. переправляется с одной из дам.
4. Господин Ч. возвращается с супругой.
5. Господин Ч. переправляется с другой дамой.
6. Господин Ч. возвращается один.
7. Через реку переправляются два других джентльмена.
8. Один из джентльменов возвращается с женой.
9. Господин и госпожа Ч. переправляются через реку.
10. Один из джентльменов возвращается с женой.
11. Через реку переправляются два джентльмена.
12. Господин Ч. возвращается один.
13. Господин Ч. переправляется с одной из дам.
14. Возвращаются господин и госпожа Ч.
15. Господин Ч. переправляется с одной из дам.
16. Господин Ч. возвращается один.
17. Господин Ч. с супругой переправляется через реку.

4. Решить задачу можно за 19 шагов следующим образом: подняться на ступеньку 1, спуститься на землю, затем наступая на ступеньки 1, 2, 3, 2, 3, 4, 5, 4, 5, 6, 7, 6, 7, 8, 9, 8, 9.

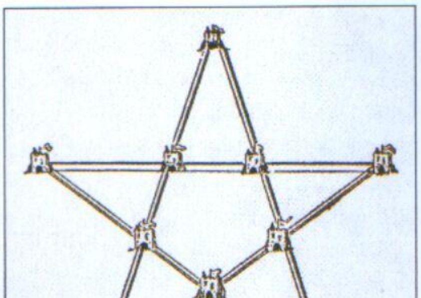
Лучшее от Генри Э. Дьюдени
Задачи с точками и линиями

Правило на правило, правило на правило,
тут немного и там немного.
Книга Исаия, глава 28, стих 10

Задачи с линиями и точками интересны для многих. Самая известная из них, которая приведена здесь, звучит так: нужно посадить девять деревьев так, чтобы они образовали десять рядов по три дерева в каждом. Авторство этой задачи приписывается сэру Исааку Ньютону. Однако первая подборка таких головоломок, по моему мнению, содержится в редкой книжице из моей библиотеки авторства Джона Джексона, которая была издана в 1821 году и носит название «Развлечения для ума для зимних вечеров». Автор приводит десять задач, в которых нужно посадить деревья в несколько рядов по определенным правилам.



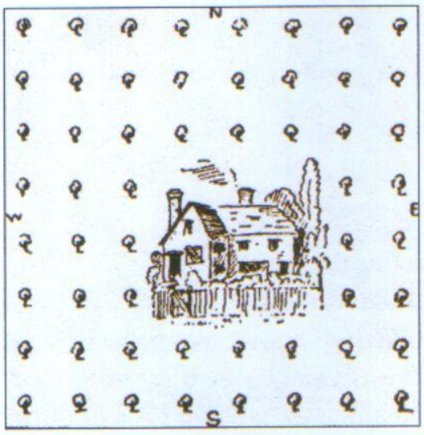
Такие головоломки всегда вызывали множество затруднений. Это головоломки в прямом смысле слова, поскольку никому еще не удалось найти удачный общий способ их решения. Они требуют проницательности, находчивости и терпения. Порой вам поможет то, что зовется удачей. Быть может, когда-нибудь некий гений найдет ключ к этой загадке. Не будем забывать, что деревья следует считать точками, поскольку если они будут достаточно велики, то можно будет по ошибке посчитать некоторые ряды прямыми, хотя в действительности они не будут являться таковыми.



1. Король и его замки

Когда-то в стародавние времена жил могущественный король, который отличался эксцентричными идеями в архитектуре. Он считал, что в симметричных фигурах заключена великая сила, и в доказательство своих слов всегда приводил в пример пчел, которые строят соты в форме шестиугольников. Он решил возвести в своей стране десять замков и соединить их укрепленными стенами так, чтобы получилось пять линий по четыре замка в каждой. Королевский архитектор представил предварительный план расположения замков (см. рисунок справа). Но монарх указал, что каждый замок может быть атакован извне, и повелел изменить план так, чтобы защитить максимальное число замков от нападения, огородив их укрепленными стенами. Архитектор ответил, что расположить замки таким образом невозможно: крепостной стеной не получится защитить даже один замок, который король желал использовать в качестве своей резиденции. Однако Его Величество поспешил объяснить архитектору, как это можно сделать. Как же построить десять замков и огородить их крепостными стенами так, чтобы выполнить все требования короля? Напомню, что должно получиться пять прямых линий по четыре замка в каждой.

2. Лимоны и груши



На рисунке изображен план дома, вокруг которого растет 51 дерево: 10 лимонных деревьев, 10 груш, остальные — дубы. Лимонные деревья посажены так, что образуют пять прямых линий по четыре дерева в каждой.

Груши тоже посажены так, что образуют пять прямых линий по четыре дерева в каждой. Суть задачи — указать, где именно растут 10 лимонных деревьев, а где — 10 груш. Есть еще одно условие: они посажены так, что на северной и восточной сторонах участка число деревьев наименьшее.

Разумеется, когда вы будете определять, где растут 10 лимонных деревьев или 10 груш, учитывать остальные деревья между ними не нужно. Другими словами, четыре дерева могут располагаться в линию так, что между ними будут находиться другие деревья (или дом), и это будет соответствовать условиям задачи.

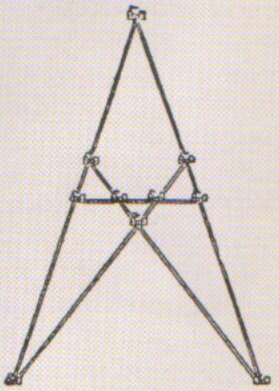
И, наконец, последняя, очень простая головоломка.

3. Десять монет

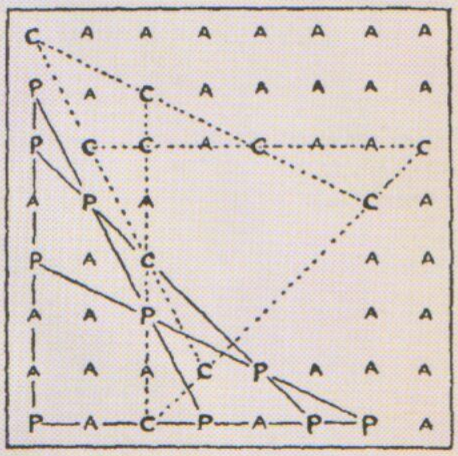
Положите десять монет на лист бумаги или картона, как показано на рисунке, по пять в каждом ряду. Уберите четыре монеты, не сдвигая остальных, и снова положите их на лист так, чтобы десять монет образовали пять прямых линий по четыре монеты в каждой. Сделать это несложно, но нужно определить, сколькими способами можно решить головоломку, считая оба начальных ряда одинаковыми.

Решения

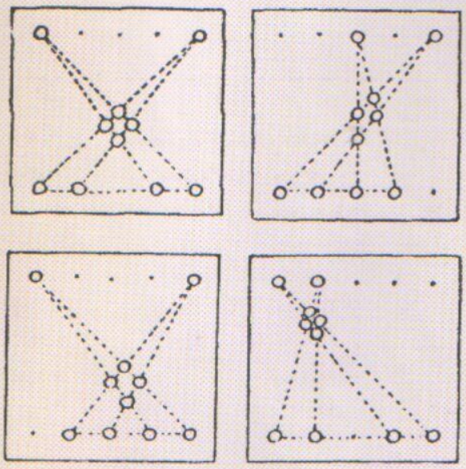
1. Существует множество способов построить замки так, чтобы они располагались в пять рядов по четыре замка в каждом. На рисунке показан единственный способ расположения замков, при котором крепостными стенами от нападения извне защищены два замка (это число является максимально возможным). Нетрудно видеть, что подобраться к этим замкам нельзя никак иначе, кроме как через крепостные стены.



2. Задачу можно было бы решить несколькими способами, если бы она не содержала условие, что число груш и лимонных деревьев на северной и восточной сторонах участка должно быть минимальным. Оптимальное расположение показано на рисунке. Лимонные деревья, груши и дубы обозначены буквами C, P и A соответственно. Лимонные деревья соединены пунктиром, груши — сплошными линиями. Можно заметить, что лимонные деревья и груши высажены в пять рядов по четыре дерева. Это единственно возможное расположение, при котором на северной и восточной сторонах участка находится всего лишь по одному дереву. Это число и будет минимально возможным.



3. Существует ровно 2 400 вариантов. Можно выбрать три любые монеты с одной стороны и еще одну монету с другой. Ниже приведены четыре примера.



Три монеты из верхнего ряда можно выбрать десятью способами, одну монету из нижнего ряда — пятью способами. Таким образом, в сумме мы получим 50 способов. Но мы также можем выбрать три монеты из нижнего ряда и одну — из верхнего. Число способов в этом случае также будет равняться пятидесяти. Таким образом, существует 100 способов выбрать четыре монеты. Выбранные монеты можно расположить 24 способами — это число всех возможных перестановок четырех монет. Таким образом, общее число решений равно $24 \cdot 100 = 2\,400$ решений.

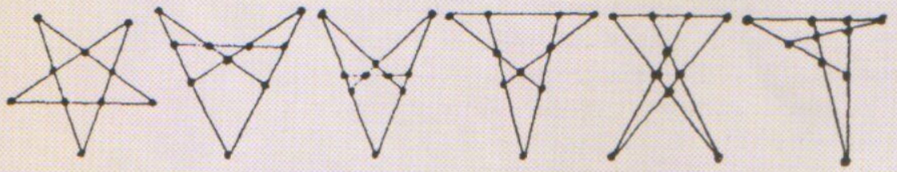
Во всех приведенных головоломках нужно расположить 10 точек в пять рядов по четыре точки в каждом. Рассмотрим общий случай подобных задач. Существует всего шесть основных решений, которые показаны на рисунках ниже. Из соображений удобства их называют «звезда», «дротик», «циркуль», «воронка», «ножницы» и «ключ». Читатель легко заметит, что любую из этих фигур можно искривлять бесконечным множеством способов, при этом принципиальное расположение точек не изменится.

В задаче «Король и его замки» архитектор привел решение «звезда», а король — решение «циркуль». В задаче «Лимоны и груши» лимонные деревья высажены в форме воронки, а груши — в форме дротика. Все решения головоломки «Десять монет» — это «ножницы». Итак, мы привели примеры для всех решений, кроме «ключа».

На неполной шахматной доске размером 7×7 клеток можно расположить 10 пешек тремя различными способами, но все они будут представлять собой «дротик». В задаче о грушевых и лимонных деревьях представлен еще один способ расположения пешек на такой доске, а поиск остальных решений мы оставляем читателям. На обычной шахматной доске размером 8×8 клеток пешки можно расположить в форме воронки, которая будет симметрична относительно диагонали доски. Наименьшая доска, на которой можно расположить фигуры в форме звезды, имеет размеры 9×7. «Ключ» потребует размеров доски 11×7, «ножницы» — 11×9, «циркуль» — 17×12. По крайней мере, это наилучшие результаты, которые мне удалось получить на скорую руку. Вероятно, их можно улучшить, но мне так не кажется.

Если мы разделим шахматную доску на две части диагональной зигзагообразной линией так, что в одной части останется 36 клеток, а в другой — 28, то сможем расположить три фигуры в бо́льшей части и одну — в меньшей (все фигуры будут представлять собой «дротик»), при этом не будет конфликтов (то есть точки будут занимать 40 различных клеток). Их также можно расположить и другими способами, не деля доску на части. Наименьшая квадратная доска, на которой можно расположить шесть одинаковых фигур так, чтобы линии никаких двух фигур не пересекались, имеет размеры 14×14. Наименьшая доска, в которой можно расположить одну из указанных фигур внутри другой так, чтобы их линии не пересекались, имеет размеры 14×12.

• • •



Звезда | Дротик | Циркуль | Воронка | Ножницы | Ключ

Льюис Кэрролл
Запутанный рассказ

Узелок 9
Змея с углами

Все вода, вода повсюду,
А попить — и капли нет.

— Еще один камешек, и оно утонет!

— Хотел бы я знать, что это ты делаешь с ведерками?

Действующие лица: Хью и Ламберт. Место действия: пляж в Литтл-Мендип. Хью пускал маленькое ведерко плавать внутри другого, несколько бóльших размеров, пытаясь определить, сколько камешков можно положить в первое ведерко, прежде чем оно потонет. Ламберт лежал на спине и предавался безделью.

Несколько минут Хью сидел молча, что-то обдумывая, а затем, вскочив на ноги, закричал:

— Ламберт, что я тебе сейчас покажу! Ни за что не догадаешься! Помнишь, что Бальбус говорил нам сегодня утром? Тело, полностью погруженное в воду, вытесняет количество жидкости, равное его объему. Верно? — спросил Хью.

— Что-то в этом роде Бальбус действительно говорил, — неуверенно согласился Ламберт.

— А теперь взгляни сюда! Видишь: маленькое ведерко почти полностью погружено в воду. Следовательно, оно должно вытеснять количество воды, равное своему объему. Я беру и — раз, два, три! — вынимаю его из большого ведерка.

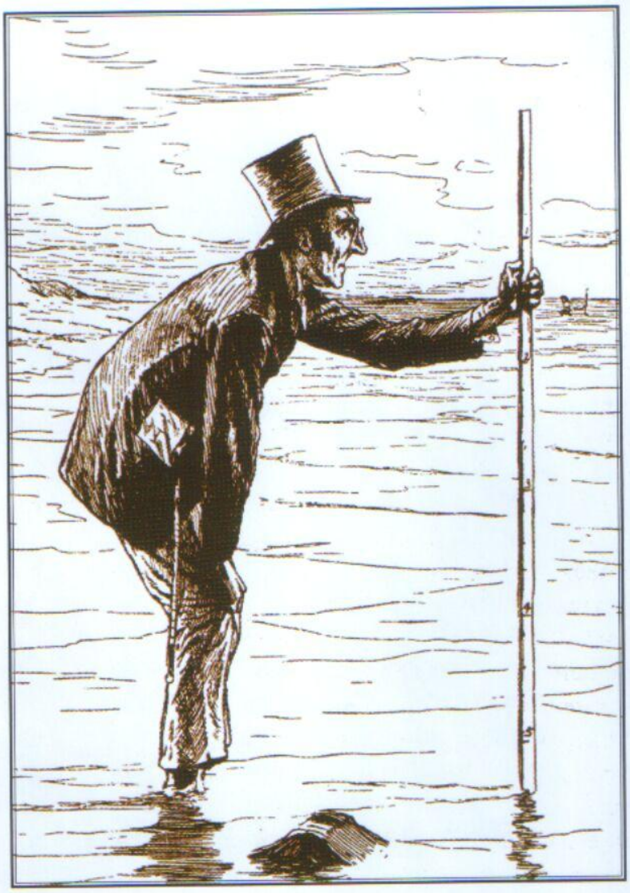
С этими словами Хью вынул маленькое ведерко, а большое передал Ламберту.

— Видишь? Воды в большом ведерке чуть-чуть на донышке. Неужели ты думаешь, что это ничтожное количество воды равно по объему маленькому ведерку?

— Оно должно быть равно, — сказал Ламберт.

— А вот и нет! — торжествующе воскликнул Хью и перелил воду из большого ведерка в маленькое. — Видишь: ведерко наполнилось меньше чем наполовину.

Бальбус уже ждал их, чтобы вместе идти к столу. Хью сразу же поведал ему о возникшем затруднении.



▲ *Представим себе человека, стоящего во время прилива у самой воды с шестом в руках, частично погруженным в море.*

— Сначала поешь, потом поговорим, — сказал Бальбус. — Ты ведь знаешь старую поговорку: «Сначала — баранина, потом — механика».

Обед прошел в полной тишине. Когда со стола было убрано, Хью достал чернила, ручки и бумагу, и Бальбус приступил к формулировке задачи, которую он приготовил для дневных занятий.

— У одного моего друга был прекраснейший сад, хотя и небольших размеров...

— Каких именно? — спросил Хью.

— Именно это вы и должны будете определить, — весело ответил Бальбус. — Скажу лишь, что сад имел форму прямоугольника — был ровно на пол-ярда больше в длину, чем в ширину, и что посыпанная гравием дорожка шириной в 1 ярд, начинаясь в одном углу, шла вокруг всего сада. Концы дорожки не смыкались. Каждый раз, когда дорожке уже, казалось, не оставалось ничего другого, как сомкнуться, она поворачивала и вновь шла вокруг всего сада рядом со своим первым отрезком, потом снова поворачивала и снова шла вокруг всего сада вдоль предыдущего отрезка и так до тех пор, пока в саду не осталось ни клочка земли.

— Дорожка извивалась, как змея с углами? — спросил Ламберт.

— Совершенно так же! И если пройти вдоль всей дорожки до последнего дюйма, держась ее середины, то длина пройденного пути окажется равной 2 1/8 мили. А пока вы найдете длину и ширину сада, я поразмыслю над тем, почему объем воды в большом ведерке оказался меньше объема маленького ведерка.

Предоставив мальчикам ломать голову над заданной задачей, Бальбус уединился у себя в комнате, чтобы поразмыслить над обнаруженным Хью механическим парадоксом.

— Для простоты предположим, — бормотал он, расхаживая взад и вперед по комнате, — что у нас имеется цилиндрический стеклянный сосуд, на поверхности которого через каждый дюйм нанесены метки, и мы заполним его водой до десятой метки. Условимся считать, что каждое деление на стенке сосуда соответствует одной пинте воды. Возьмем теперь сплошной цилиндр, каждый дюйм которого имеет объем в полпинты воды, и погрузим его на 4 дюйма в воду, налитую в первый цилиндр. Дно сплошного цилиндра достигнет отметки 6 дюймов на стенке первого цилиндра. При этом сплошной цилиндр вытеснит 2 пинты воды. Что станет с этими двумя пинтами? Если бы сплошной цилиндр не выступал над поверхностью воды, то эти две пинты преспокойно расположились бы сверху, заполнив наружный цилиндр до отметки 12 дюймов. Но сплошной цилиндр выступает над поверхностью воды, занимая половину объема, который мог бы вместиться между отметками 10 и 12 дюймов. Следовательно, оставшаяся часть пространства может вместить лишь одну пинту. А что же станется со второй? Если бы сплошной цилиндр не выступал над поверхностью воды, эта пинта преспокойно могла бы разместиться сверху, заполнив наружный цилиндр до отметки 13 дюймов. Но, к сожалению... О, тень великого Ньютона! — воскликнул Бальбус в ужасе. — Что же сможет остановить непрестанно поднимающийся уровень воды?

И тут его осенила блестящая идея.

— Напишу-ка я обо всем этом небольшой трактат.

Трактат, написанный Бальбусом

Известно, что тело, погруженное в жидкость, вытесняет часть жидкости, объем которой равен объему тела. При этом уровень жидкости поднимается ровно настолько, насколько он поднялся бы, если бы к уже имеющейся жидкости добавили количество жидкости, объем которого равен объему погруженного тела. Ларднер обнаружил, что частичное погружение тела сопровождается точно такими же явлениями.

Предположим, что на поверхности жидкости каким-либо образом удерживается частично погруженное в нее тело. Поскольку часть жидкости вытесняется, уровень ее поднимается. Вследствие повышения уровня жидкости какая-то новая часть тела оказывается погруженной, вытесняет новую порцию жидкости, что приводит к новому повышению уровня и т. д. Ясно, что весь этот процесс должен продолжаться до тех пор, пока в жидкость не погрузится все тело, после чего начнет погружаться то, что его удерживало (это нечто может рассматриваться как часть тела). Представим себе человека, стоящего во время прилива у самой воды с шестом в руках, который частично погружен в море. Человек этот стоит прямо и неподвижно, и мы все знаем, что он непременно утонет. Люди, во множестве погибающие таким образом, дабы удостовериться в философской истине, имеют большее право называться мучениками науки, чем Галилей или Кеплер.

— Должно быть, в мои рассуждения где-то вкралась ошибка, — сонно пробормотал Бальбус, вытягивая свои длинные ноги на софе. — Надо проверить их еще раз.

(Перевод Юрия Данилова, публикуется с сокращениями.)

Решения

КУБЫ

Задача

В учебниках физики говорится, что тело, полностью погруженное в жидкость, вытесняет столько жидкости, что ее объем равен объему самого тела. Справедливо ли это утверждение для маленького ведерка, плавающего в другом ведерке несколько больших размеров?

Решение

Говоря о теле, «вытесняющем жидкость», авторы учебников имеют в виду, что оно «занимает пространство, которое можно заполнить жидкостью, не вызывая каких-либо изменений в окружающей среде». Если уничтожить ту часть меньшего ведерка, которая выступает над поверхностью воды в большем ведерке, а вместо остальной части ведерка взять столько воды, сколько оно вмещает, то уровень воды в большом ведерке в полном соответствии с учебниками физики останется неизменным.

ТРАКТАТ БАЛЬБУСА

Задача

Из рассуждений, приводимых в трактате Бальбуса, следует, что при погружении тела в сосуд с водой уровень воды последовательно поднимается на 2 дюйма, 1 дюйм, 1/2 дюйма и т. д. Бальбус считает бесконечным ряд, образуемый приращениями уровня, и делает вывод, что уровень воды должен неограниченно возрастать. Верно ли такое заключение?

Решение

Нет, неверно. Сумма всех приращений уровня никогда не достигнет 4 дюймов, ибо, сколько бы членов ряда мы не взяли, от отметки 4 дюйма нас будет отделять расстояние, равное последнему взятому члену ряда.

САД

Задача

Сад имеет форму прямоугольника, длина которого на 1/2 ярда больше ширины. Дорожка шириной в 1 ярд и длиной в 3630 ярдов, усыпанная гравием и закрученная спиралью, заполняет сад. Найти длину и ширину сада.

Ответ

Ширина сада 60 ярдов, длина — 60 1/2 ярда.

Решение

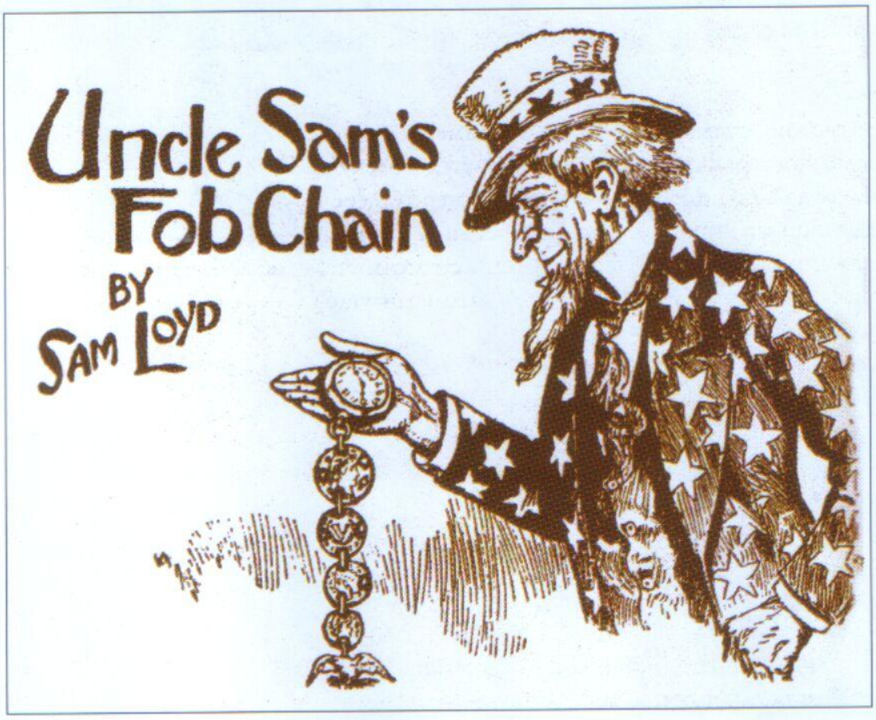
Разделим дорожку на прямые участки и повороты — квадраты размером 1×1 ярд в углах. Число полных ярдов и их долей, пройденных вдоль прямых участков дорожки, очевидно, равно площади прямых участков дорожки, измеряемой в квадратных ярдах. Расстояние, проходимое на каждом повороте, равно 1 ярду, а площадь уголка также равна 1 ярду (но уже квадратному). Таким образом, площадь сада равна 3630 квадратным ярдам. Если x — ширина сада в ярдах, то $x(x + 1/2) = 3630$. Решая это квадратное уравнение, получаем $x = 60$. Следовательно, ширина сада равна 60 ярдам, а его длина — 60 1/2 ярда.

Арифметические и алгебраические задачи

1. Цепочка для часов дяди Сэма

На днях мне показали любопытную цепочку для часов, сделанную, по старому обычаю, из монет. Эта цепочка состояла из четырех соединенных между собой монет и фигурки орла. В монетах, как показано на рисунке, было проделано пять, четыре, три и два отверстия соответственно, так, что соединяющие их звенья могли располагаться различными способами.

Эта особенность породила спор о возможном числе вариантов, которыми можно расположить четыре монеты и фигурку орла на цепочке. Как вы считаете, сколько таких вариантов?

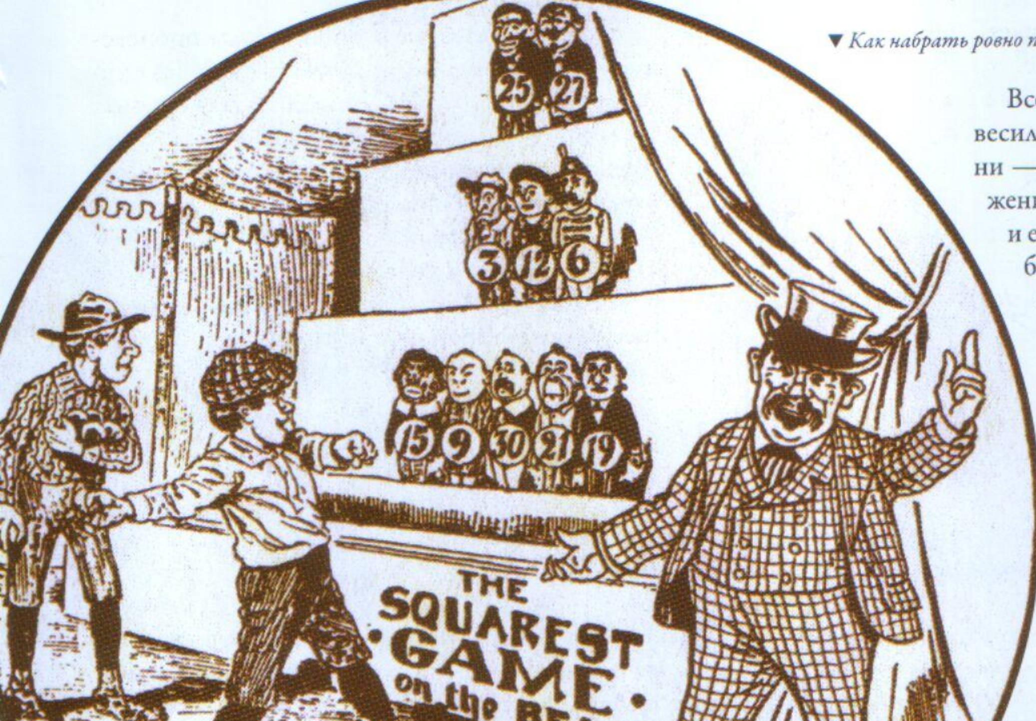


▲ Сколько разных цепочек можно составить из пяти звеньев?

2. Три невесты

Один старый скупец, чтобы привлечь потенциальных женихов для трех своих дочерей, объявил, что даст каждой в приданое столько золота, сколько она весит. Все свадьбы сыграли в один день, и перед взвешиванием невесты съели по огромному торту, что немало обрадовало их женихов.

Все невесты вместе весили 396 фунтов, Нелли весила на 10 фунтов больше, чем Китти, а Минни — на 10 фунтов больше, чем Нелли. Один из женихов, Джон Браун, весил столько же, сколько и его невеста, Уильям Джонс — в полтора раза больше своей невесты, а Чарльз Робинсон — в два раза больше, чем его невеста. Все женихи и невесты в сумме весили 1000 фунтов. Какие фамилии будут носить девушки после замужества?



▼ Как набрать ровно пятьдесят очков?

3. Самая справедливая игра на пляже

На днях я с другом совершал прогулку по Кони-Айленду, и мы увидели павильон, где, как утверждал его владелец, находилась самая справедливая игра на пляже. Нужно было сбить десять кукол бейсбольным мячом. Владелец аттракциона сказал: «Бросайте столько раз, сколько захотите, каждый бросок стоит один цент, бросать можно с любого расстояния. Сложите числа на сбитых куклах, и, как только сумма станет равной 50, вы выигрываете сигару с позолоченным кольцом ценой в 25 центов».

У нас закончились деньги, но мы так и не смогли выиграть. Мы заметили, что никто поблизости не курил призовых сигар. Сможете сказать, как набрать ровно 50 очков в этой игре?

4. Множество морских змей

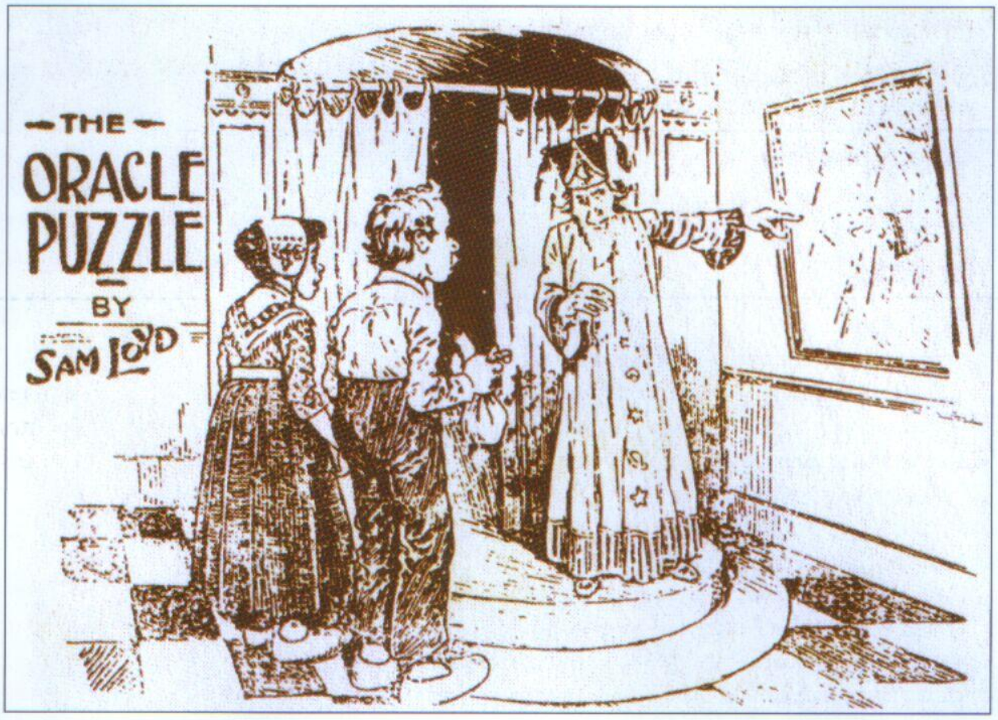
В этом году морских змей расплодилось как никогда много, и на морских курортах стали замечать змей, которые там раньше не водились. Моряки рассказывали страшные истории, которые были весьма оригинальны, несмотря на старинный сюжет.

С изобретением фотографии, однако, рассказы старых моряков и судовые журналы, подлинность которых была подтверждена, перестали удовлетворять публику, которая требовала подлинных кадров.

Один капитан утверждал, что, пока его корабль лежал в дрейфе близ Кони-Айленда, его окружило множество морских змей, и большинство из них были слепыми.

«Три змеи ничего не видели по правому борту, — рассказывал он, — три ничего не видели по левому борту. Три змеи были зрячими на правый глаз, три — на левый, еще три были зрячими на оба глаза, а еще три были полностью слепы». Поэтому он записал в судовом журнале, что «видел восемнадцать змей».

Однако парочке фотолюбителей удалось заснять этих чудовищ. Когда были проявлены негативы, оказалось, что капитан существенно ошибся. С помощью фотографий удалось точно определить, сколько змей было на самом деле. Сколько же змей видел капитан?



▲ *Каким будет число коз и овец?*

5. Головоломка оракула

Древние греки, римляне и египтяне безоговорочно верили оракулам — всё, начиная от объявления войны и заканчивая продажей скота, требовало совета и одобрения оракула. На известной картине «Зевс в Додоне» изображены два крестьянина, которые просят у оракула совета по какому-то незначительному вопросу, и тот властным жестом повелевает им посмотреть в зеркало. Чтобы показать важность и достоинство оракула, либо, что более вероятно, передать загадочность, которой он окружал любые мелочи, на рисунке изображены двое крестьян, которые хотят узнать, благословит ли великий Зевс доброй улыбкой покупку козы и барашка.

Оракул сказал: «Они будут размножаться, пока число овец, умноженное на число коз, не станет равным числу, которое, отраженное в священном зеркале, окажется равным общему числу коз и овец в стаде».

Слова оракула неоднозначны и загадочны, но тем не менее читатель сможет разгадать его загадку.

Решения

1. Математики и любители головоломок, которым доставляет удовольствие решение задач с перестановками, подсчитали, что можно составить 92 160 разных цепочек из четырех монет и подвески в форме орла. Очевидно, что большую монету можно подвесить за любое из пяти отверстий, и повернуть одной из двух сторон. Следовательно, всего допустимо 10 вариантов. Вторую монету можно расположить 8 способами, поэтому только из двух этих монет можно составить 80 различных сочетаний. Если умножить это число на 6 возможных положений третьей монеты, 4 варианта для последней монеты и 2 варианта, которыми можно расположить фигурку орла, получим, что если располагать все монеты именно в таком порядке, то общее число вариантов будет равно 3840. Так как число перестановок монет равно 24, то ответом к задаче будет 3 840 вариантов, умноженные на 24, то есть 92 160.

2. После замужества невесты будут носить фамилии Китти Браун, Нелли Джонс и Минни Робинсон. Китти весила 122 фунта, Нелли — 132, Минни — 142.

3. 50 очков можно набрать, если сбить куклы за 25, 6 и 19 очков.

4. Всего было три полностью слепые и три полностью зрячие змеи.

5. Многие крестьяне, подобно нашим читателям, провели немало времени перед зеркалом, перебирая различные варианты, пока не нашли верный ответ: 9 овец и 9 коз. Произведение этих чисел, 81, отраженное в зеркале, даст 18 — общую численность стада.

• • •

Задачи на разрезание

1. Великая монада

Это древний и достойный внимания символ. Он изображен на флаге Южной Кореи, а Северная тихоокеанская железнодорожная компания использовала его в качестве эмблемы. Немногие знают, что он носит название великой монады. Этот знак для китайцев означает то же, что крест для христиан. Это символ божественного и вечного, а две его части, инь и ян, символизируют мужское и женское начала. Говорят, что более трех тысяч лет назад один ученый заметил: «Безграничное порождает крайность. Крайность порождает два начала. Два начала производят четыре четверти, а от четырех четвертей происходит квадратура восьми диаграмм феу-хи». Надеюсь, что читатель не потребует объяснений, поскольку я не имею ни малейшего представления о том, что это значит. Однако я убежден, что на протяжении веков этот символ имел оккультное значение.

Я представляю вашему вниманию простейшую монаду. Ответьте на три вопроса об этом великом символе.

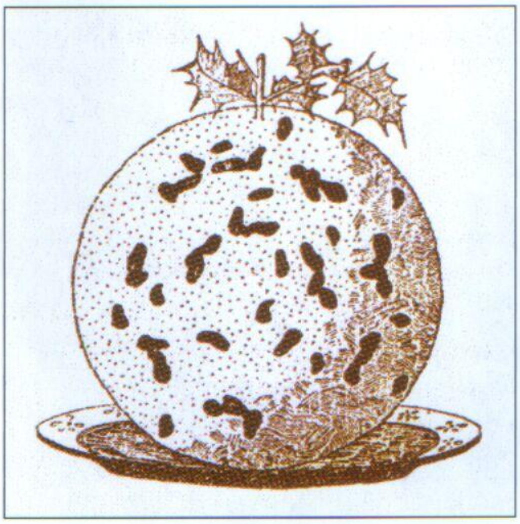
I. Площадь какой фигуры больше — внутреннего круга, содержащего инь и ян, или внешнего кольца?

II. Разделите инь и ян на четыре части одинаковой формы и площади одним разрезом.

III. Разделите инь и ян на четыре части равной площади, но различной формы одним прямым разрезом.

2. Рождественский пирог

— Раз уж мы заговорили о рождественских пирогах, — сказал гостеприимный хозяин, поглядывая на внушительную банку варенья на противоположном краю стола, — я припоминаю, что один мой друг как-то загадал мне задачу о пироге. Вот она, — добавил он, покопавшись в кармане.



— Цель задачи — определить начинку, я полагаю, — сказал студент Итона.

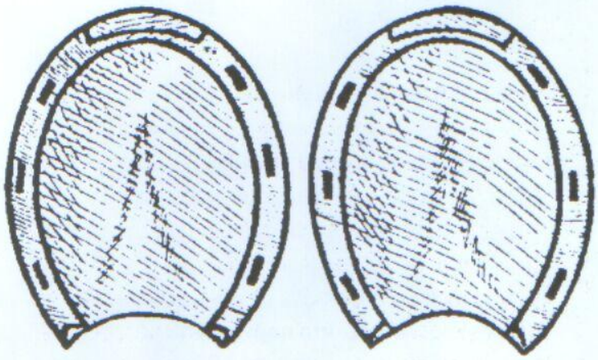
— Нет, начинку вы определите, когда попробуете пирог. Сейчас я прочитаю условие задачи. «Разрезать пирог на две части одинаковой формы и размера, не трогая чернослив. Пирог следует считать плоским диском, а не шаром».

— Почему рождественский пирог нужно считать диском? И зачем может понадобиться разрезать его столь точно? — спросил озадаченный гость.

— Это всего лишь головоломка. Гости один за другим пытались справиться с задачей, но никому не удалось найти решение. Задачу непросто решить, если не знать секрет приготовления пирога. Если же он вам известен, задача не представит для вас никаких трудностей.

3. Две подковы

По какой-то никому не известной причине считается, что подковы приносят удачу. Это очень старое суеверие. Еще Джон Обри (1626—1700) писал: «В большинстве домов лондонского Вест-Энда над дверью висит подкова». В домах на улице Монмут в 1813 году висело 17 подков, в 1855-м — на 13 больше. Даже лорд Нельсон приказал прибить подкову на мачту своего корабля «Виктори». Сегодня считается, что подковы приносят удачу, если они крепко прибиты к копытам лошади, везущей наш экипаж.



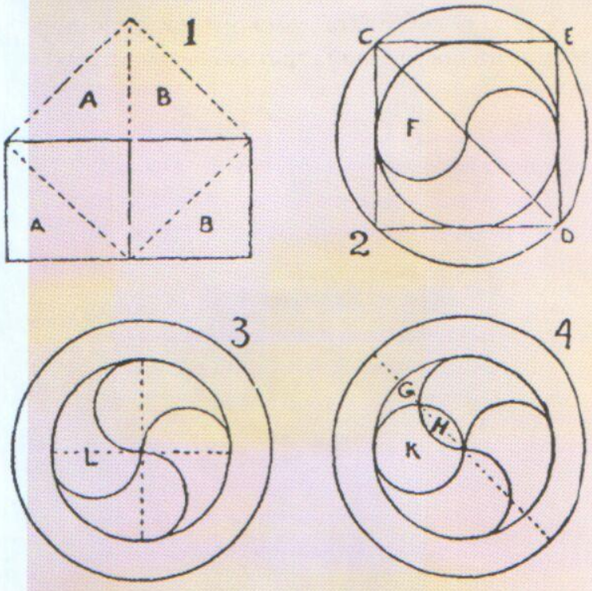
Подкова, подобно свастике и другим символам, которые я изучал, означала здоровье, благополучие, добрую волю и даже была символом человеческого рода, поэтому она представляет немалый интерес. Неужели подкова не обладает загадочными эзотерическими или математическими свойствами? Я изучил этот вопрос и решил обратить внимание моих читателей на примечательный факт: две подковы, изображенные на рисунке, удивительным образом связаны с окружностью, символом вечности.

Я представлю простую задачу, чтобы вы оценили, сколь трудно обнаружить эту связь, которая оставалась сокрытой на протяжении веков. Я знаю, что моим читателям доставляет удовольствие разгадывать загадки.

Нужно разрезать две подковы на четыре части разной формы и составить из них идеальную окружность. Каждую подкову нужно разрезать на две части, а внутренняя часть подковы должна располагаться внутри получившейся окружности.

Решения

1. Площади кругов относятся друг к другу как квадраты их диаметров. Если один круг имеет диаметр 2 дюйма, второй — 4 дюйма, то площадь одного круга будет в четыре раза больше площади другого, поскольку квадрат числа 4 в четыре раза больше, чем квадрат числа 2.



I. Если мы посмотрим на рисунок 1, то увидим, что два равных квадрата можно разделить на четыре части, образующие большой квадрат. Отсюда следует, что площадь квадрата в два раза меньше квадрата его диагонали. На рисунке 2 изображен квадрат, так как он часто встречается на древних изображениях монады. Это дало мне основания полагать, что этот символ имеет математическое значение. Оказалось, что площадь внешнего кольца точно равна площади внутреннего круга. Сравнив рисунок 2 с рисунком 1, мы увидим, что квадрат диаметра CD в два раза больше квадрата диаметра CE внутренней окружности. Следовательно, площадь большого круга в два раза больше площади малого, и это означает, что площадь внешнего кольца точно равна площади внутреннего круга. Таков ответ на первый вопрос задачи.

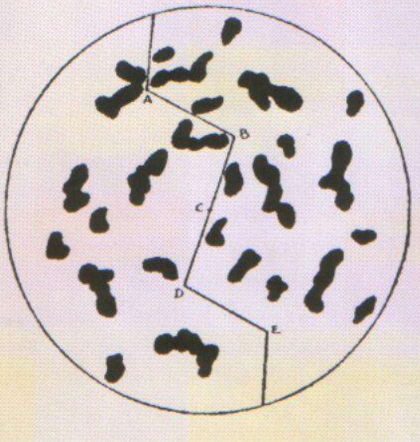
II. На рисунке 3 представлено простое решение второй части задачи. Очевидно, что оно верно, и его можно доказать, разрезав фигуру и наложив ее части друг на друга. Увидеть это вам помогут пунктирные линии, изображенные на рисунке.

III. Третья часть задачи решается разрезом по линии CD, изображенной на рисунке 2, но нужно доказать, что площадь фигуры F на самом деле в два раза меньше площади инь или ян. Доказательство представлено на рисунке 4. Площадь круга K в четыре раза меньше площади круга, содержащего инь и ян, так как диаметры этих кругов отличаются в два раза.

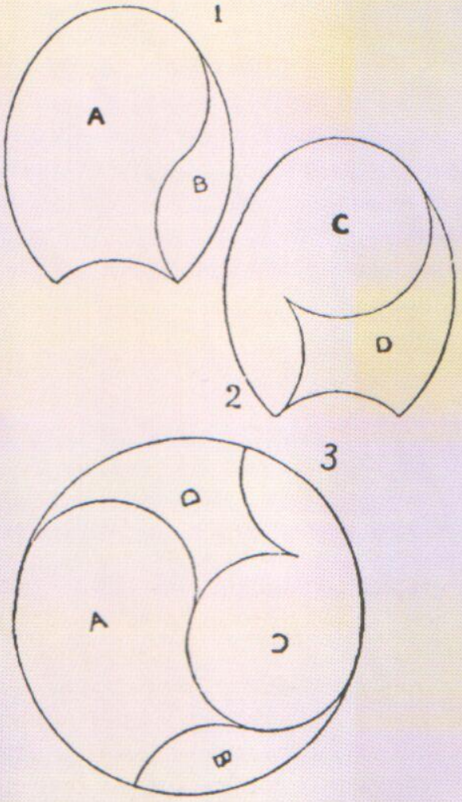
Кроме того, площадь фигуры L, изображенной на рисунке 3, в четыре раза меньше площади круга. Очевидно, что площади G и H равны, следовательно, площади их половин также равны. F «теряет» часть фигуры K, но «приобретает» часть фигуры L точно такой же площади. Следовательно, площадь фигуры F равна половине площади инь или ян.

2. На рисунке показано, как можно разрезать пирог на две части одинаковой формы и площади.

Линии обязательно должны проходить через точки A, B, C, D и E. Существует бесконечное множество вариантов, удовлетворяющих этому условию. Например, в точке, расположенной строго между точкой A и краем круга, линию разреза можно провести бесконечным множеством способов (причем эта линия может быть как прямой, так и кривой) при условии, что линия, соединяющая точку E с противоположным краем круга, будет зеркальным отражением этой линии. Аналогично можно изменять форму линии и в других местах.



3. Суть задачи в том, чтобы разрезать две подковы (включая их внутреннюю часть) на четыре части, то есть каждую подкову — на две части так, чтобы получилась идеальная окружность. Также указано, что четыре части могут быть разного размера. В действительности при решении этой задачи используется принцип, известный нам по китайскому символу монаде (см. задачу 1).



На рисунке изображено решение задачи. На рисунках 1 и 2 вы видите подковы, разрезанные на четыре части разной формы, из которых можно составить идеальную окружность, изображенную на рисунке 3. Заметьте, что части A и B одной подковы и части C и D другой подковы образуют две равные половины окружности, инь и ян великой монады. Обратите внимание, что составить подкову из частей круга проще, чем составить круг из двух подков. Однако задача не представляет особой трудности, если знать, что длинная сторона подковы должна образовывать часть границы круга. Обратите внимание на разницу между B и D — она поможет вам решить многие подобные задачи. Фигура D получается из фигуры B добавлением симметричной фигуры — криволинейного квадрата. Следовательно, чтобы составить из этих элементов окружность, нужно повернуть B и D на четверть оборота в разные стороны.

Льюис Кэрролл

Запутанный рассказ

Узелок 10
Пирожки (часть первая)

Пирожки, пирожки, горячие пирожки!

— Ох, как грустно! — воскликнула Клара, и глаза ее наполнились слезами.

— Грустно, но с точки зрения арифметики весьма любопытно, — последовал менее романтический ответ ее тетушки. — Одни из них потеряли на службе родине руку, другие — ногу, третьи — ухо, четвертые — глаз...

— А некоторые лишились всего сразу... — задумчиво прошептала Клара, когда они с тетушкой проходили мимо длинных рядов нежившихся на солнце загорелых и обветренных ветеранов. — Тетя, вы видите того старика с красным лицом? Он что-то чертит на песке своей деревянной ногой, а остальные внимательно его слушают. Должно быть, он чертит схему какого-нибудь сражения...

— Сражения при Трафальгаре! Ясно, как дважды два — четыре! — тотчас же перебила Клару тетушка.

— Вряд ли, — робко возразила племянница. — Если бы он принимал участие в сражении при Трафальгаре, его бы давно уже не было в живых.

— Не было бы в живых! — презрительно повторила тетушка. — Да он живее нас с тобой, вместе взятых! По-твоему, рисовать на песке да еще деревянной ногой не значит быть в живых? Хотела бы я знать, что тогда по-твоему означает быть в живых!

Клара растерянно промолчала: она никогда не была особенно сильна в логике.

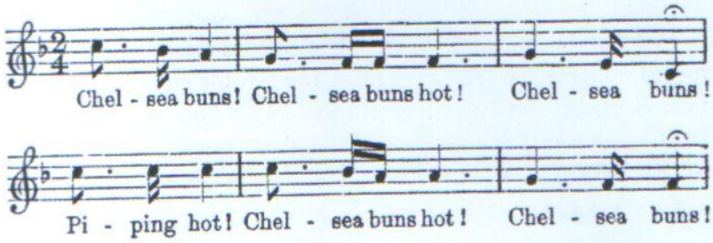
— Вернемся-ка мы лучше к арифметике, — продолжала Безумная Математильда. Эксцентричная старая леди не упускала случая подбросить своей племяннице какую-нибудь задачку. — Как ты думаешь, какая часть ветеранов потеряла и ногу, и руку, и глаз, и ухо?

— Я... я не знаю. Откуда я могу знать? — с трудом произнесла оробевшая девочка: кому-кому, а ей хорошо было известно, что последует дальше.

— Разумеется, без необходимых исходных данных ты ничего узнать не сможешь, но я сейчас дам тебе...

— Дайте ей пирожок, миссис! Только у нас в Челси умеют печь такие пирожки. Девочки их очень любят, — раздался вдруг приятный голос, и разносчик пирожков, проворно приподняв край белоснежной салфетки, показал аккуратно уложенные в корзине пирожки, выглядевшие весьма соблазнительно. Пирожки были квадратной формы, щедро смазаны яйцом, румяны и блестели на солнце.

— Нет, сэр! Я не имею обыкновения давать своей племяннице такую гадость. Убирайтесь прочь! — и старая леди угрожающе взмахнула зонтиком. На добродушного разносчика эта гневная тирада, казалось, не произвела ни малейшего впечатления. Прикрыв пирожки салфеткой, он удалился напевая.



— Пирожки эти — просто яд! — сказала старая леди. — То ли дело арифметика. Уж она-то всегда полезна!

Клара, вздохнув, проводила голодным взглядом быстро уменьшавшуюся вдали корзину с пирожками и стала послушно внимать своей неутомимой тетушке, которая тут же начала излагать

► *Клара, вздохнув, проводила голодным взглядом быстро уменьшавшуюся вдали корзину с пирожками.*

условие задачи, производя все вспомогательные подсчеты на пальцах.

— Скажем, так: 70 % ветеранов лишились глаза, 75 — уха, 80 — руки и 85 — ноги. Просто великолепно! Спрашивается, чему равна наименьшая часть ветеранов, лишившихся одновременно глаза, уха, руки и ноги?

Больше ни тетушка, ни племянница не произнесли ни слова, если не считать восклицания «Пирожки!», вырвавшегося у Клары, когда разносчик со своей корзиной скрылся за углом. В полном молчании обе леди — преклонных лет и юная — дошли до старинного особняка, в котором остановился вместе с тремя сыновьями и их почтенным наставником отец Клары.

Бальбус, Хью и Ламберт опередили тетушку и племянницу лишь на несколько минут. Они вернулись с прогулки, во время которой Хью умудрился задать головоломку, не только безнадежно испортившую настроение Ламберту, но и поставившую в тупик самого Бальбуса.

— Если я не ошибаюсь, четверг наступает после среды ровно в полночь? — начал Хью.

— Иногда наступает, — осторожно заметил Бальбус.

— Не иногда, а всегда! — решительно заявил Ламберт.

— Иногда, — мягко настаивал Бальбус. — В шести случаях из семи в полночь наступает не четверг, а какой-нибудь другой день недели.

— Я хочу лишь сказать, — пояснил Хью, — что когда вслед за средой наступает четверг, то происходит это в полночь и только в полночь.

— Безусловно, — подтвердил Бальбус. Ламберт счел за лучшее промолчать.

— Прекрасно. Предположим теперь, что здесь, в Челси, сейчас как раз полночь. Тогда к западу от Челси (например, в Ирландии или в Америке), где полночь еще не наступила, на календаре среда, а к востоку от Челси (например, в Германии или в России), где полночь наступила раньше, — четверг. Я рассуждаю правильно?

— Да, вполне, — вновь подтвердил Бальбус, и даже Ламберт соизволил кивнуть головой.

— Но если в Челси сейчас полночь, то к востоку и к западу от него смена дат происходить, казалось бы, не может. Тем не менее на земном шаре непременно найдется место, по одну сторону от которого будет среда, а по другую — четверг. И что хуже всего: люди, живущие в этом месте, считают дни недели в обратном порядке! Да и как им считать иначе, если к востоку от того места на календарях стоит «среда» а к западу — «четверг». Ведь это означает, что после четверга наступает среда!

— А я знаю! А я знаю! — закричал Ламберт. — Эту головоломку мне задавали и раньше, только

▲ *— Мне кажется, — задумчиво проговорил Бальбус, — что такое место действительно существует, хотя мне и не приходилось слышать о нем раньше.*

формулировали ее иначе. Моряки уходят в кругосветное плавание, огибают земной шар с востока на запад, возвращаются домой и тут обнаруживают, что у них пропал один день. Им кажется, что они вернулись домой в среду, а все вокруг говорят, что это четверг, и все потому, что у тех, кто оставались дома, полночь наступала на один раз больше, чем у тех, кто находились в плавании. А если бы моряки плыли с запада на восток, то один день у них оказался бы лишним.

— Все это мне известно, — возразил Хью в ответ на несколько сумбурное объяснение Ламберта, — но к делу не относится. Ведь сутки для корабля имеют неодинаковую продолжительность. Когда корабль плывет в одну сторону, сутки на нем продолжаются более 24 часов, когда же он плывет в другую сторону — менее 24 часов. Отсюда и происходит путаница с днями недели: ведь у людей, живущих на суше на одном и том же месте, сутки длятся ровно 24 часа.

— Мне кажется, — задумчиво проговорил Бальбус, — что место, о котором говорит Хью, на земном шаре действительно существует, хотя мне и не приходилось слышать о нем раньше. Людям, живущим там, должно быть странным видеть вчерашний день к востоку от себя, а завтрашний — к западу. Особенно трудно понять, что происходит, когда наступает полночь: ведь в этом странном месте на смену «сегодня» приходит не «завтра», а «вчера». Тут есть над чем задуматься!

О том, как подействовал этот обмен мнениями на наших друзей, мы уже говорили: входя в дом, Бальбус усиленно размышлял над головоломкой, а Ламберт был погружен в мрачное раздумье.

Решения

ИНВАЛИДЫ ИЗ ЧЕЛСИ

Задача

70 процентов инвалидов потеряли глаз, 75 процентов — ухо, 80 процентов — руку и 85 процентов — ногу. Каков наименьший процент ветеранов, лишившихся одновременно глаза, уха, руки и ноги?

Ответ

10 процентов.

Решение

Предположим, что инвалидов ровно 100 человек. Общее число всех увечий равно 70 + 75 + 80 + 85 = 310. Следовательно, на каждого инвалида приходится по 3 увечья, а десятерым особенно не повезло: они получили все 4 увечья. Таким образом, наименьшая доля инвалидов, лишившихся глаза, уха, руки и ноги, равна 10 процентам.

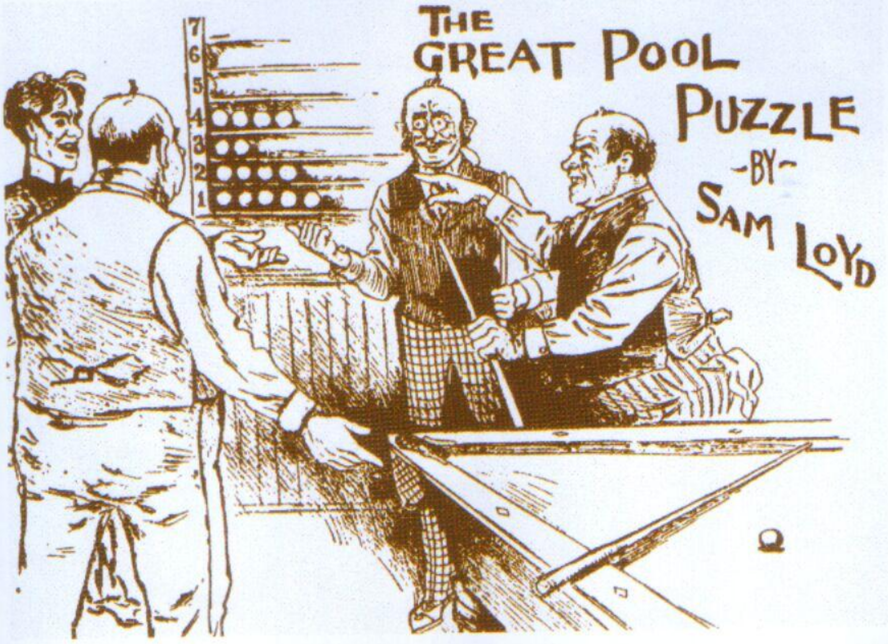
СМЕНА ДАТ

Задача

Решение географической задачи — о смене дат — я вынужден отложить на неопределенный срок отчасти потому, что не знаю, как ее решить.

Лучшее от Сэма Лойда

Вероятности и теория игр



▲*Кто из игроков должен заплатить за игру?*

1. Игра с кубиками на ярмарке

Эта игра с кубиками очень популярна на ярмарках и гуляниях, но два игрока редко сходятся во мнениях относительно того, какова же здесь вероятность выигрыша. Чтобы определить ее, достаточно решить несложную задачу по теории вероятностей. На игровой доске нарисованы шесть квадратов, обозначенных числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Игроки могут поставить любую сумму на любое число. Далее нужно бросить три кубика. Если выбранное игроком число выпало только на одном кубике, игрок забирает ставку плюс получает выигрыш, равный сумме ставки. Если выбранное число выпало на двух кубиках, игроку возвращается его ставка плюс удвоенная ее сумма. Если число выпало на трех кубиках, игроку возвращается его ставка плюс утроенная ее сумма. Разумеется, если выбранное число не выпало ни на одном кубике, игрок теряет деньги.

Чтобы вы лучше поняли правила игры, рассмотрим пример. Допустим, вы поставили доллар на число 6. Если на одном кубике выпало 6, вам возвращается доллар и вы получаете еще доллар сверху. Если 6 выпало на двух кубиках, вам возвращается доллар и вы получаете еще два доллара сверху. Если 6 выпало на трех кубиках, вам возвращается доллар и вы получаете еще три доллара сверху.

Любой игрок может сказать: вероятность того, что мое число выпадет на одном кубике, равна 1/6, но так как кубиков три, то вероятность равна 3/6, или 1/2, поэтому игра честная. Разумеется, организатор игры хочет, чтобы вы думали именно так, но эти рассуждения ошибочны.

Кто же имеет преимущество — игрок или банк? Каково преимущество одной из сторон в каждом случае?

2. Великая головоломка об американском бильярде

Трое мужчин начали игру в американский бильярд с 15 шарами и, по обычаю, условились, что за игру платит проигравший. Игрок № 1 был мастером и согласился сыграть против двух других игроков, № 2 и 3. Ему нужно было загнать в лузу столько шаров, сколько двум его противникам, вместе взятым. Игроки уже собирались начать, когда к ним присоединился четвертый. Он был им незнаком, поэтому ему не дали никакой форы: он должен был играть наравне с остальными тремя игроками. На рисунке показано, сколько шаров забил каждый игрок в этой партии. Возник спор о том, кто же проиграл.

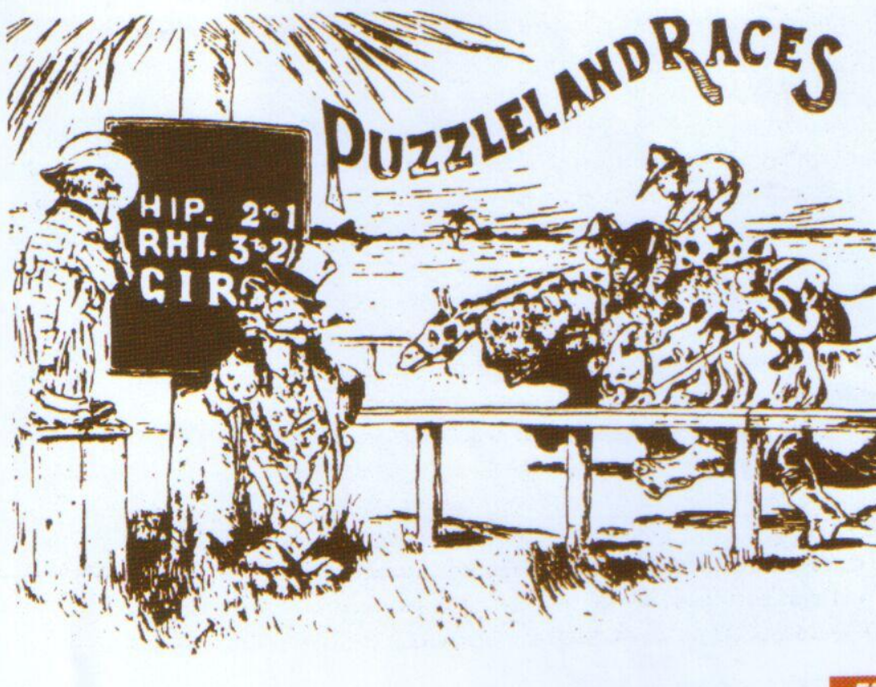
Суть задачи — определить, кто из игроков должен заплатить за игру согласно условиям, оговоренным выше. Задача не столь проста, как может показаться. Не нашлось даже двух игроков, которые бы сошлись во мнениях. Кто из игроков должен заплатить и почему?

3. Скачки в стране головоломок

Чтобы показать, что лишь немногим увлеченным любителям скачек знакома теория вероятностей, предложим следующую, очень простую задачу.

Если ставки на победу принимаются два к одному против гиппопотама, три к двум против носорога, то каковы будут ставки на победу жирафа на скачках в Стране головоломок?

▼ *Каковы ставки на победу жирафа?*



Приведу еще одну головоломку с теми же героями.

Если жираф опережает носорога на одну восьмую мили в скачках на две мили, а носорог опережает гиппопотама на четверть мили в тех же скачках, на сколько жираф опередит гиппопотама в скачках на две мили?

4. Система лорда Росслина

Недавние новости о том, что некто выиграл 777 777 франков в казино Монте-Карло, заставили меня вспомнить о системе лорда Росслина, которая была очень популярна несколько лет назад.

Не вдаваясь в технические аспекты игры в рулетку, в которую играют в казино Монте-Карло, условимся, что система лорда Росслина основана на ставках, кратных числу 7, и попросим читателя решить следующую задачу. Допустим, что игрок (который ставит только на красное или черное, при этом вероятность выигрыша и проигрыша одинакова) ставит один франк семь раз подряд. Затем, вне зависимости от общего выигрыша или проигрыша, он повышает ставку до 7 франков и снова играет 7 раз. Далее он ставит 49 франков 7 раз, затем — 343 франка 7 раз, затем — 2 401 франк 7 раз, после чего 16 807 франков семь раз, затем 117 649 франков семь раз. Если, сыграв 49 раз, он выиграл 777 777 франков, сколько раз из этих 49 он выиграл? Задача проста, но тем не менее представляет интерес как математическое объяснение «успешной системы Росслина».

Если вам не удастся сразу получить точно 777 777 франков, проведите несколько экспериментов, и вы увидите, что это не столь математическая задача, как может показаться.

Решения

1. Из 216 равновероятных исходов, возможных при броске трех кубиков, вы выигрываете в 91 случае и проигрываете в 125. Вероятность выиграть столько, сколько вы поставили, или более, равна 91/216 (вероятность выиграть столько, сколько вы поставили, равна 100/216), а вероятность проигрыша — 125/216. Если бы на кубиках всегда выпадали разные цифры, игра была бы честной.

Допустим, что на каждое число было поставлено по 1 доллару. При каждом броске, когда выпадает три разных числа, банк выигрывает три доллара и платит победителям еще три. Однако, если выпадает два одинаковых числа, чистый выигрыш банка равен 1 доллару, если выпадает 3 одинаковых числа, банк выигрывает 2 доллара. В целом, игрок в среднем теряет 7,87 цента на каждый поставленный доллар вне зависимости от сумм ставок и исхода игры. Это дает банку преимущество в 7,87 % на каждый поставленный доллар.

2. Лучший игрок (№ 1) утверждает, что он не проиграл, так как он обыграл игрока № 4. Однако № 4, который обыграл № 3, сказал, что он также не проиграл, а № 3 заявил, что он, играя в команде с № 2, обыграл № 1, следовательно, по договоренности, он не может считаться проигравшим.

Различные аргументы, приводимые сторонами, только осложняли дело. Так как правила не касались игрока № 4 и он не был связан какими-то договоренностями, то он надел шляпу и плащ и отправился домой. Тогда игроку № 1 пришлось отвечать по своим обязательствам. Так как он забил 5 шаров, а его оппоненты — 6, то за игру пришлось заплатить именно игроку № 1.

Однако существует еще одна точка зрения, которая меняет решение задачи. Игроки № 3 и 2 играли против игрока № 1 по особым правилам, но так как № 1 обыграл № 4, то он свободен от какой бы то ни было ответственности. Так как игроки № 2, 3 и 4 играли на равных, без каких-либо особых договоренностей, то проиграл игрок № 3.

(Очевидно, сложность задачи заключается в различии формулировок, поэтому на нее нельзя дать четкий ответ. Когда в игру вошел четвертый человек, игрокам следовало прийти к соглашению относительно того, кто будет считаться проигравшим. Так как они этого не сделали, то однозначно определить проигравшего нельзя. В любом случае, задача Лойда допускает достаточно интересные решения.)

3. Если мы представим вероятности в виде дробей, то получим, что вероятность победы гиппопотама равна 1/3, носорога — 2/5. Так как сумма трех вероятностей должна быть равна 1, вероятность выигрыша жирафа равна 4/15, то есть ставки на него будут приниматься в расчете 11 к 4.

Ответ на второй вопрос таков: жираф опередит гиппопотама на 23/64 мили. Допустим, что жираф пробегает 2 мили за 1 час. За это же время носорог пробежит 1 и 7/8 мили, то есть на 2 мили носорог потратит 16/15 часа. За то же время, что носорог пробежит 2 мили, гиппопотам пробежит 1 3/4 мили. Иными словами, он пробежит 105/64 мили за час. Так как 2 мили — это 128/64 мили, нужно всего лишь вычесть из этого числа 105/64, чтобы получить ответ. Разумеется, ответ будет тем же самым вне зависимости от выбранной скорости жирафа.

4. Существуют одно или два различных решения, но в их основе лежит один и тот же принцип.

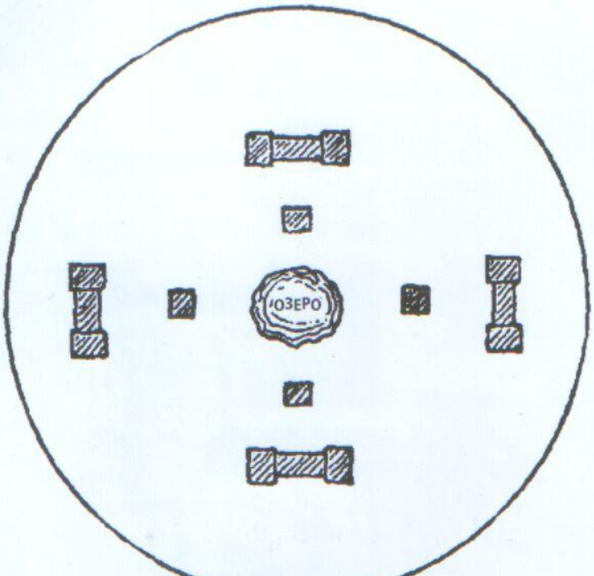
Игрок проигрывает 7 ставок по 1 франку, затем проигрывает 3 ставки по 7 франков и выигрывает 4, что уравнивает его выигрыши и проигрыши. Затем он выигрывает 2 раза по 49, 5 раз, проигрывает эту же сумму, потом выигрывает 7 раз по 343. Далее он 3 раза проигрывает 2 401 и выигрывает 4 раза, после чего 2 раза выигрывает по 16 807 и проигрывает 5 раз, и, наконец, выигрывает 7 раз последнюю ставку, 117 649 франков. Итого игрок выиграл 869 288 франков и проиграл 91 511 франков. Таким образом, чистый выигрыш составит 777 777 франков.

Генри Э. Дьюдени

Три геометрические задачи

1. Задача о стене

Четверо бедняков построили свои хижины вокруг небольшого озера. Затем четверо богачей построили свои поместья так, как показано на рисунке, и решили прибрать озеро к рукам. Они попросили архитектора построить стену наименьшей длины так, чтобы отгородить бедняков от озера, а самим беспрепятственно проходить к нему. Как следует построить стену?



2. Задача о бумажном змее

Однажды я с моим другом, профессором в одной из областей науки, запускал бумажных змеев на юге Суссекса. Тогда же я провел некоторые вычисления, которые заинтересуют моих читателей. К воздушному змею была привязана веревка, остаток которой был плотно намотан на вал так, что получился идеальный шар. Этот шар имел 24 дюйма в диаметре, диаметр самой веревки равнялся одной сотой дюйма. Какова длина веревки?

Этот простой и понятный вопрос может сбить с толку многих. Посмотрим, сможете ли вы, не углубляясь в вычисления, получить приближенный ответ, скажем, с точностью до 100 000 дюймов. Будем считать, что свернутая веревка имеет форму сплошного шара, и не будем учитывать толщину вала, на который она намотана. Мне интересно, сколько читателей смогут вычислить длину веревки с указанной точностью.

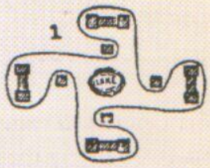
3. Папина головоломка

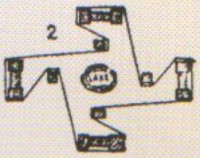
Я предлагаю читателям задачу Паппа, жившего в Александрии в конце III века. Это пятая задача восьмой книги его «Математического собрания». Я привожу ее в том же виде, что и много лет назад, когда я предложил ее читателям под названием «Папина головоломка», чтобы узнать, догадаются ли они, что автором этой задачи является сам Папп.

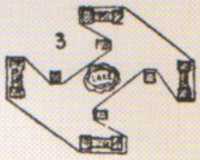
Отец взял два картонных прямоугольника разной ширины и вырезал из одного из них треугольный фрагмент так, что, если этот кусок картона подвесить на нити, проходящей через точку А, его длинная сторона будет расположена строго горизонтально, как показано на рисунке. Папа предложил дочери найти точку А для другого куска картона такую, что, если отрезать от него треугольную часть аналогичным образом, его длинная сторона также была бы расположена горизонтально.

Разумеется, положение этой точки нужно рассчитать, а не определить экспериментально. Эта задача имеет одно очень интересное следствие. Сможете ли вы найти его?

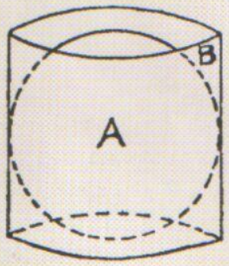
1. Ответ, который приводится в старых книгах, изображен на рис. 1, где показано, как построить криволинейную стену по условиям задачи. Однако нас интересует самая короткая стена из возможных. Вспомним, что кратчайшим расстоянием между двумя точками является прямая, и получим результат, показанный на рис. 2. Разумеется, эта стена короче предыдущей, однако правильным ответом будет тот, что изображен на рис. 3. Если вы измерите длину этой стены, то обнаружите, что она существенно короче той, что изображена на рис. 2.







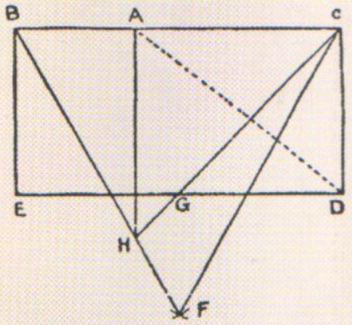
2. Я обнаружил, что тех, кто пытается решить эту задачу, можно разделить на две группы. Первые пытаются найти ответ с помощью более или менее сложных вычислений, в которых используется число π, вторые используют более простые расчеты, которые, увы, дают результат, неимоверно далекий от правильного. Я представлю сравнительно простой метод, в котором не используется расчет диаметра окружности. Я назвал его методом шляпного мастера.



Представим, что мы положили наш шар из веревки (A) в коробку для шляпы цилиндрической формы (B) так, что шар идеально вписывается в коробку, касаясь ее боковых граней, а также верхней и нижней стороны. Согласно правилу, которое должен знать каждый, в эту коробку может поместиться еще половина объема сферы. Следовательно, так как сфера имеет диаметр 24 дюйма, коробка для шляпы того же диаметра и высотой, равной 2/3 диаметра сферы (иными словами, 16 дюймов), будет точно равна шару по объему.

Теперь предположим, что эта коробка для шляпы — металлический цилиндр, составленный из множества веревочных цилиндров, скрепленных подобно волоскам кисточки. По условию задачи свободное пространство между веревками отсутствует. Сколько нужно таких цилиндров толщиной в одну сотую дюйма, чтобы составить большой цилиндр шириной в 24 дюйма? Площади окружностей относятся между собой как квадраты их диаметров. $(1/100)^2 = 1/10\,000$, $24^2 = 576$. Следовательно, большой цилиндр вместит 5 760 000 маленьких цилиндров. Но мы уже показали, что каждый из этих маленьких цилиндров имеет длину 16 дюймов. Следовательно, общая длина веревки составит $16 \times 5\,760\,000 = 92\,160\,000$ дюймов. Если мы переведем эту величину в мили, получим, что длина веревки, к которой прикреплен воздушный змей профессора, равна примерно 1 454,5 мили (2 240 километра). Оставим в стороне размышления о том, действительно ли змей может подняться на такую высоту и не оборвется ли веревка под собственной тяжестью.

3. Многие считают, что ниже представлен верный ответ к задаче. Они утверждают, что если расстояние будет BA равно одной трети BC, и, как следствие, площадь прямоугольника ABE будет равна площади оставшегося треугольника, то при подвешивании длинная сторона фигуры будет располагаться строго горизонтально.



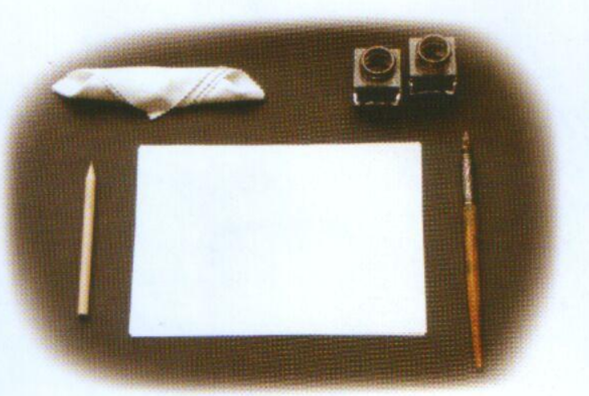
Читатели наверняка помнят шутку Карла II, который предложил Королевскому обществу обсудить вопрос, почему уровень воды в сосуде не поднимается, если опустить туда живую рыбу. Посреди жарких споров один из членов Общества незаметно вышел из комнаты и провел эксперимент, обнаружив, что уровень воды в сосуде в действительности поднимается. Если читатель проведет эксперимент с куском картона, то мгновенно обнаружит, что вышеприведенные расчеты неверны. Площадь фигуры — одно дело, сила притяжения — совершенно другое. Треугольник будет наклонен в сторону вершины D. Это нужно скомпенсировать, увеличив площадь прямоугольника. В действительности отношение длин отрезков BA и AC равно $1/\sqrt{3}$. Это число нельзя выразить абсолютно точно, $\sqrt{3} \approx 1{,}732$. Рассмотрим правильное решение в общем виде. Его можно получить многими способами, но приведенный мной кажется мне наиболее простым.

Нарисуйте равносторонний треугольник BCF, где BF = CF = BC. Обозначьте точку G так, чтобы DG равнялось DC. Проведите линию CG до пересечения с BF в точке H. Проведем HA параллельно BE. Именно вдоль линии, соединяющей точку A и угол D, и должен пройти разрез, обозначенный пунктирной линией.

С этой задачей связан любопытный факт: положение точки A не зависит от размера стороны CD. Это лучше всего видно в приведенном мной решении, чем в остальных. Я предпочел изложить здесь этот вариант решения именно по этой причине, хотя задачу можно решить так, что все линии при построении пройдут внутри картонного прямоугольника. Если мы начнем уменьшать ширину прямоугольника и будем приближать E к B и D к C, то линия CG, которая является диагональю квадрата, всегда будет указывать в неизменном направлении и будет пересекать BF в точке H. Наконец, если мы захотим рассчитать приближенное значение длины BA, нужно всего лишь умножить длину прямоугольника на 0,366. Так, если длина прямоугольника равна 7 дюймам, получим $7 \times 0{,}366 = 2{,}562$, то есть немногим больше двух с половиной дюймов.

Однако задача любопытна еще и по другой причине. Вы увидели, что положение точки A не зависит от ширины картонного прямоугольника, а только от его длины. Следовательно, чтобы решить задачу, девочке нужно положить обрезанный прямоугольник поверх другого и обозначить точку A на том же расстоянии от верхнего левого угла. Поэтому с задачей Паппа вполне может справиться и ребенок, который не знает ни физики, ни геометрии.

Льюис Кэрролл
Запутанный рассказ



◀ *Стол был сервирован как для банкета с той лишь разницей, что вместо привычных приборов на нем были разложены письменные принадлежности.*

Узелок 10
Пирожки (часть вторая)

Пирожки, пирожки, горячие пирожки!

— Добро пожаловать, м'м, милости просим! — приветствовал тетушку представительный дворецкий. (Заметим кстати, что произнести подряд три «м», не вставив между ними ни единого гласного, может далеко не всякий. Это под силу лишь дворецкому, искушенному во всех тонкостях своей профессии.) — Вас уже ожидают в библиотеке. Полный аншлаг!

— Как он смеет говорить о твоем отце «дуршлаг», да к тому же «полный»! — негодующе прошипела на ухо племяннице Безумная Математильда, когда они пересекали просторную гостиную. — Да нет же, тетя, он просто хотел сказать, что все в сборе, — едва успела прошептать в ответ Клара, как дворецкий ввел их в библиотеку. При виде открывшегося перед ней зрелища Клара лишилась дара речи. За столом в торжественном молчании замерли пять человек: Хью, Ламберт, Норман и Бальбус.

Во главе стола восседал отец. Не нарушая тишины, он молча указал Кларе и Безумной Математильде на пустые кресла справа и слева от себя. Стол был сервирован как для банкета с той лишь разницей, что вместо привычных приборов на нем были разложены письменные принадлежности. По всему было видно, что дворецкий вложил много выдумки в эту злую шутку. Вместо тарелок перед каждым из присутствовавших был положен лист бумаги, вместо ложки и вилки слева и справа от каждого прибора лежали ручка с пером и карандаш. Роль ломтика хлеба исполняла перочистка, а там, где обычно стоит бокал для вина, красовалась чернильница. Украшением стола — главным блюдом — служила обтянутая зеленым сукном шкатулка. Когда пожилой джентльмен, сидевший во главе стола, встряхивал ее, а делал он это беспрерывно, она издавала мелодичный звон, словно внутри ее находилось бесчисленное множество золотых гиней. — Сестра! Дочь моя! Сыновья! И... и Бальбус! — начал пожилой джентльмен столь неуверенно, что Бальбус счел необходимым заявить о полном согласии со сказанным, а Хью — забарабанить кулаками по столу. Столь лестные знаки внимания окончательно сбили с толку неопытного оратора. — Сестра! — начал он снова, затем помолчал и, встряхнув шкатулку, продолжил с лихорадочной поспешностью: — Сегодня я... некоторым образом... э... собрал вас... э... по поводу знаменательного события... В этом году... одному из моих сыновей исполняется... — и тут он снова умолк в полном замешательстве, ибо достиг середины речи намного раньше намеченного времени, но возвращаться было уже поздно. — Совершенно верно! — воскликнул Бальбус. — Вот именно! — ответствовал пожилой джентльмен, который понемногу начал приходить в себя. — Мысль о том, чтобы ежегодно дарить каждому из сыновей столько гиней, сколько лет ему исполняется в текущем году, пришла мне в голову в весьма знаменательное время. Надеюсь, мой друг Бальбус поправит меня («Еще как поправит! Ремнем!» — прошептал Хью, но его никто не услышал, кроме Ламберта, который нахмурился и укоризненно покачал головой), если я ошибаюсь. Так вот, эта мысль, повторяю, пришла мне в голову именно в тот год, когда, как сообщил мне Бальбус, сумма возрастов двух из вас была равна возрасту третьего. По этому случаю, как вы все, конечно, помните, я произнес речь... Бальбус счел, что настал подходящий момент для того, чтобы вставить несколько слов, и начал: — Это была самая... — Произнес речь... — уколол его предостерегающим взглядом пожилой джентльмен. — Несколько лет назад Бальбус сообщил мне... — Совершенно верно, — подтвердил Бальбус. — Вот именно, — кивнул благодарный оратор и продолжил: — ...Я говорю, Бальбус сообщил мне о другом не менее знаменательном событии — что сумма возрастов двух из вас в тот год оказалась вдвое больше возраста третьего. По этому поводу я тоже произнес речь, — разумеется, не ту, что в первом случае. В этом году — как утверждает Бальбус — мы присутствуем при третьем знаменательном событии, и я... (тут Безумная Математильда многозначительно посмотрела на часы) ...я тороплюсь изо всех сил, — воскликнул пожилой джентльмен, демонстрируя ясность духа и полное самообладание, — и перехожу к существу дела. Число лет, протекших со времени первого знаменательного события, составляет ровно две третьих от числа гиней, которые я вам тогда подарил. Мальчики! Пользуясь этими данными, вычислите свой возраст, и вы получите от меня ежегодный подарок! — Но мы и так знаем свой возраст! — воскликнул Хью.

— Замолчите, сэр! — вне себя от негодования вскричал отец, выпрямляясь во весь рост (составлявший ровно пять футов и пять дюймов). — Я сказал, что при решении вы имеете право пользоваться только данными задачи, а не гадать о том, сколько кому лет.

— Ты также получишь от меня такой же подарок, как мальчики, если сумеешь решить задачу, — шепнула Безумная Математильда племяннице и вышла вслед за братом.

Решение

ЗАДАЧА О ВОЗРАСТЕ СЫНОВЕЙ

Условие

Некогда сумма возрастов двух сыновей была равна возрасту третьего сына. Через несколько лет сумма их возрастов стала равна удвоенному возрасту третьего сына. Когда число лет, прошедших с тех пор, когда сумма возрастов двух сыновей была равна возрасту третьего, составит 2/3 от суммы возрастов всех трех сыновей, третьему сыну исполнится 21 год. Сколько лет будет двум другим сыновьям?

Ответ

15 и 18 лет.

Решение

Обозначим возраст сыновей в момент первого знаменательного события x, y, $(x + y)$. Заметим, что если $a + b = 2c$, то $(a - n) + (b - n) - 2(c - n)$ при любых n. Следовательно, последнее соотношение, коль скоро оно выполняется хоть когда-нибудь, выполняется всегда, в частности в момент первого знаменательного события. Но по условию задачи сумма возрастов двух сыновей (x и y) в этот момент равна возрасту третьего и, следовательно, не может быть вдвое больше возраста третьего $(x + y)$. Следовательно, условие должно выполняться для суммы возраста третьего сына $(x + y)$ и возраста какого-нибудь из первых двух сыновей, то есть x или y (какого именно, безразлично).

Предположим, например, что $x + y + x = 2y$, тогда $y = 2x$. Таким образом, в момент первого знаменательного события возрасты сыновей образуют арифметическую прогрессию x, $2x$, $3x$, а число лет, прошедших с тех пор, составляет 2/3 от $6x$, то есть равно $4x$. Итак, в момент, когда отец произносил свою последнюю торжественную речь, его сыновьям исполнилось по $5x$, $6x$ и $7x$ лет. Возраст любого из сыновей выражается целым числом. Об этом свидетельствует то место в речи отца, где говорится: «В этом году одному из моих сыновей исполняется…». Поэтому $7x = 21$, $x = 3$, $5x = 15$ и $6x = 18$.

Перо бессильно передать, с какой торжественностью встали из-за стола брат и сестра. Мог ли, спрашиваем мы, отец хитро улыбнуться в такую минуту при виде своих удрученных сыновей? Могла ли, спрашиваем мы, тетушка лукаво подмигнуть своей приунывшей племяннице? Были ли похожи на сдавленный смех те звуки, которые раздались, когда Бальбус, выйдя из комнаты вслед за хозяином дома и его сестрой, прикрывал за собой дверь? Нет, нет и нет! И все же дворецкий рассказал потом кухарке, что… Впрочем, не станем же мы повторять всякие сплетни.

Ночные тени сжалились над молчаливой мольбой несчастных и «не сомкнулись над ними» (поскольку дворецкий внес лампу). «Во тьме ночной (те же услужливые тени, но в концентрированном виде) было слышно порой, как где-то залает собака» (на заднем дворе всю ночь напролет пес выл на луну). Но ни «когда утро настало», ни позже сестра и трое братьев «не воспрянули духом» — они так и не смогли обрести былое душевное спокойствие, навсегда покинувшее их после того, как все эти задачи обрушились на них и увлекли на путь нескончаемых страданий.

— Вряд ли честно, — пробормотал Хью, — задавать нам такие головоломные задачи.

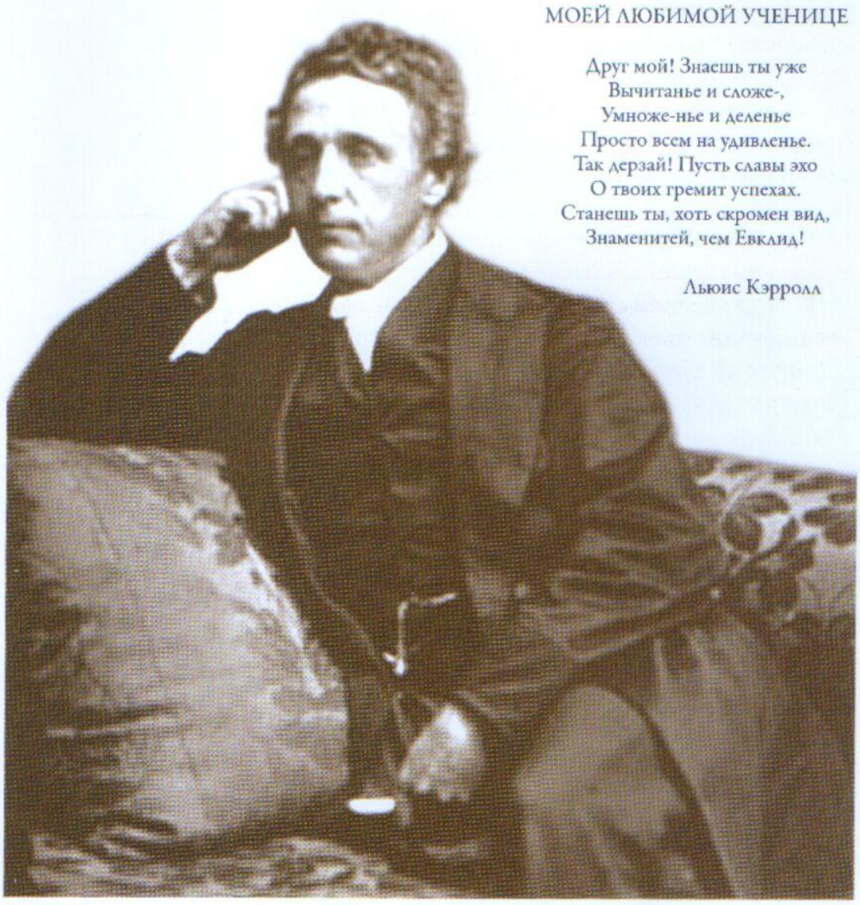
— Нечего сказать — честно! — с горечью подхватила Клара. Всем моим читателям я могу лишь повторить слова Клары и честно признаться:

— Больше мне сказать нечего! До свиданья!

МОЕЙ ЛЮБИМОЙ УЧЕНИЦЕ

Друг мой! Знаешь ты уже
Вычитанье и сложе-,
Умноже-нье и деленье
Просто всем на удивленье.
Так дерзай! Пусть славы эхо
О твоих гремит успехах.
Станешь ты, хоть скромен вид,
Знаменитей, чем Евклид!

Льюис Кэрролл



Лучшее от Сэма Лойда

Новые арифметические и алгебраические задачи

1. Две индейки

«Эти две индейки вместе весят 20 фунтов, — сказал мясник. — Каждый фунт маленькой индейки стоит на два цента больше, чем каждый фунт большой».

Госпожа Смит купила маленькую индейку за 82 цента, госпожа Браун заплатила за большую 2 доллара 96 центов. Сколько весит каждая индейка?

2. Кошка против собаки

Много лет назад, когда цирк Барнума действительно был «величайшим шоу на Земле», его знаменитый владелец попросил меня придумать для него несколько головоломок. Он хотел опубликовать их и назначить приз тому, кто пришлет верное решение. Большую известность приобрели «Вопросы сфинкса», так как давшему правильный ответ был обещан большой приз.

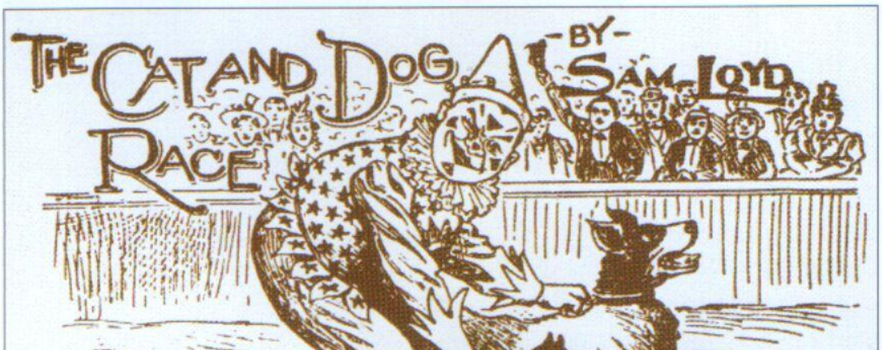
Барнуму особенно понравилась задача о кошке и собаке. Он объявил, что любой, кто даст верный ответ до 1 апреля, получит приз, или, по его собственным словам, он «больше не будет держать кота в мешке и выпустит его к удовольствию всех заинтересованных».

Задача звучала так:

«Обученные кошка и собака должны пробежать расстояние в 100 футов и вернуться обратно. С каждым прыжком собака приближается к финишу на три фута, кошка — всего на два, но Марлен совершает три прыжка за то же время, за которое Терри совершает два. Каков возможный исход забега в этих условиях?»

Ввиду того, что правильный ответ был опубликован первого апреля, в День дурака, и сам Барнум упомянул кота в мешке, многие заподозрили, что великий циркач придержал карту в рукаве.

▼ *Кто победит — собака или кошка?*



3. Корова, коза и гусь

Некий голландец, у которого были коза и гусь, повстречал девушку, ведущую за собой корову. Увидев его, испуганная девушка закричала.

— Чего ты испугалась? — спросил Ганс.

— Ты поцелуешь меня против моей воли, — ответила застенчивая девушка.

— Как же я смогу это сделать, когда у меня в руках коза и гусь? — спросил Ганс.

— Что мешает тебе воткнуть посох в землю, привязать к нему козу и накрыть гуся моим ведром? — спросила девушка.

— Твоя сердитая корова меня забодает, — сказал Ганс.

— Ой, эта глупая корова никого не бодает. Почему бы тебе не отвести всех трех животных на мое пастбище? — ответила напуганная девушка.

И здесь возникает интереснейшая задача, поскольку во время последовавшего спора выяснилось несколько занимательных фактов. Выяснилось, что коза и гусь вместе съедают столько корма, сколько корова; на пастбище достаточно травы, чтобы прокормить козу и корову в течение 45 дней, либо корову и гуся в течение 70 дней, либо козу и гуся в течение 90 дней. На сколько дней хватит корма для коровы, козы и гуся? Ответить нужно быстро, так как Ганс и Катрина не могут ждать.

4. Парад в день Святого Патрика

Во время недавнего парада в день Святого Патрика возникла любопытная задача. Грандмаршал по традиции объявил, что члены почетного и древнего ордена Хайбернов пройдут на параде днем, если утром пойдет дождь, и пройдут утром, если дождь будет днем. Из-за этого многие люди подумали, будто на день Святого Патрика обязательно пойдет дождь. Кейси хвастался, что уже четверть века он марширует на военном параде в день Святого Патрика — еще с тех пор, когда был юношей.

Я не буду подробно останавливаться на его комментарии и скажу, что даже после того как Кейси в конце концов сломили возраст и пневмония, он незримо шествовал вместе с бессмертной процессией.

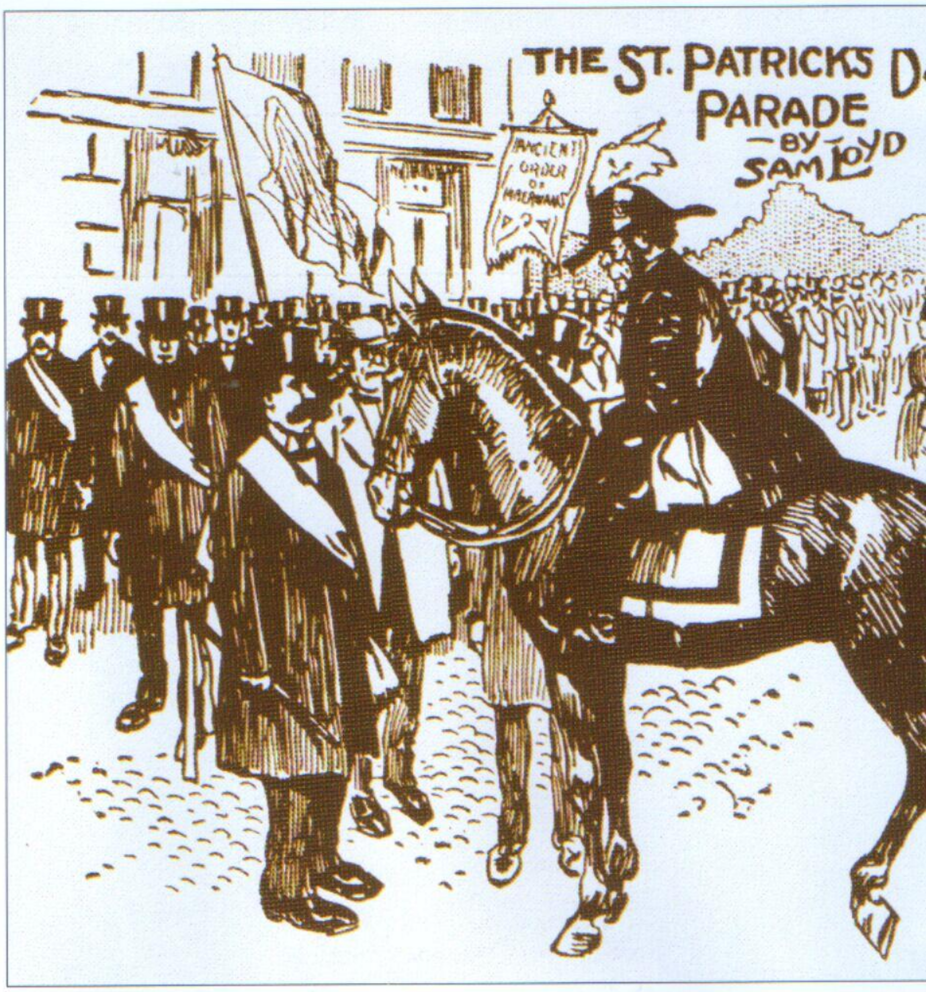
Когда юноши вновь собрались, чтобы воздать почести Святому Патрику 17 марта, то обнаружили, что в их рядах имеется постыдное пустое место. Парад превратился в похоронную процессию, исполненную паники.

Юноши по обычаю выстроились в шеренги по десять и прошли один или два квартала в этом строю, причем в последней шеренге, где обычно маршировал Кейси по причине больной левой ноги, было всего девять человек. Звуки оркестра заглушались криками зрителей, которые спрашивали, что случилось с хромым, и участники парада подумали, что будет лучше сменить строй и встать по девять человек в шеренге, так как построиться по одиннадцать человек в шеренге было невозможно.

Но им вновь не хватило Кейси, и процессия задержалась, когда обнаружилось, что в последней шеренге всего восемь человек. Юноши поспешили построиться в шеренги по восемь, затем по семь, пять, четыре, три и даже два человека, но всякий раз в последнем ряду оставалось пустое место для Кейси. Хотя это может показаться нелепым, но юноши во всех шеренгах стали перешептываться: всякий раз, когда они начинали маршировать, им якобы слышался звук волочащейся ноги Кейси. Они были настолько уверены в том, что призрак Кейси марширует среди них, что никто не осмелился замкнуть шествие.

Однако грандмаршал был умным и сообразительным человеком и без промедления приказал, чтобы юноши маршировали колонной по одному так, что если бы дух Кейси действительно был среди них, он замкнул бы длинную процессию в честь святого Патрика.

Если предположить, что число участников парада не превышало 7000, сможете ли вы определить, сколько юношей принимало участие в этом мероприятии?



▲ *Сколько юношей участвовало в параде?*

Решения

1. Большая индейка весила 16 фунтов, маленькая — 4 фунта.

2. Разумеется, выиграет кошка. Чтобы пробежать нужное расстояние и вернуться, ей потребуется ровно 100 прыжков. Собаке же придется пробежать 102 фута и вернуться обратно, потому что после тридцать третьего прыжка собака пробежит 99 футов. Следовательно, потребуется еще один прыжок, после которого она окажется на 2 фута дальше последней отметки. Собаке понадобится всего 68 прыжков, чтобы прийти к финишу. Так как собака движется со скоростью, равной 2/3 скорости кошки, то когда последняя совершит 100 прыжков, собака не успеет совершить 67 прыжков.

Однако у Барнума был еще один туз в рукаве. Допустим, что кошку зовут Терри, а собаку — Марлен. Фраза «Марлен совершает три прыжка за то же время, за которое Терри совершает два» означает, что собака пробежит 9 футов, в то время как кошка пробежит всего 4. Так, собака совершит 68 прыжков и придет к финишу первой, а кошка за это время преодолеет всего 90 футов и 8 дюймов.

3. В задаче о пастбище нужно учитывать, что трава растет каждый день. По условию, корова ест столько же, сколько коза и гусь. Следовательно, если корова и коза съедят всю траву, которая растет на поле, и всю, которая вырастет, за 45 дней, очевидно, что две козы и гусь сделают это за такое же время. Так как козе и гусю хватит корма на в два раза большее время, коза съест траву, которая изначально росла на поле, за 90 дней, в то время как гусь будет кормиться травой, которая вырастет за это время. Следовательно, если корова съедает 1/60 «корма» в день, коза — 1/90, вместе они съедают 1/36. Так, корова и коза съедят траву за 36 дней, а гусь будет съедать всю траву, которая будет вырастать ежедневно.

4. Когда Кейси был жив, число участников парада делилось без остатка на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10. Найдем наименьшее общее кратное этих чисел, 2520, и вычтем 1, чтобы получить число участников парада без Кейси. Это число и было бы ответом к задаче, если бы не фраза «построиться по одиннадцать человек в шеренге было невозможно». Так как 2 519 делится на 11, нужно взять следующее общее кратное, 5040, и вычесть 1. Получим 5039. Так как это число не делится на 11, а следующие общие кратные превышают 7000, можно сделать вывод, что 5039 является единственным верным ответом.

Генри Э. Дьюдени

Головоломки с цифрами

Девятью достоинствами они зовутся.
Драйден. «Цветок и лист»

Я представляю вашему вниманию эти задачи о девяти цифрах, которые выделяю в отдельный класс задач, поскольку всегда считал, что они заслуживают большего внимания, чем им обычно уделяют. Помимо простого трюка, который заключается в удалении девяток, законы, связанные с такими задачами, известны немногим, хотя некоторые знания свойств цифр часто помогают существенно ускорить арифметические вычисления. Приведу один пример — первый, который пришел в голову.

Если я попрошу вас определить, является ли число 15 763 530 163 289 квадратом некоторого числа, как вы это сделаете? Если бы это число заканчивалось на 2, 3, 7 или 8, оно не могло бы быть квадратом, однако, на первый взгляд, в этом числе нет ничего такого, что помешало бы ему быть квадратом. Подозреваю, что читатель со вздохом или брюзжанием примется за вычисление квадратного корня. Однако если бы ему были известны некоторые свойства цифр, он смог бы легко ответить на мой вопрос. Сумма цифр этого числа равна 59; сумма цифр этого числа, в свою очередь, равна 14, а сумма цифр этого числа равна 5 (последнее число я назову цифровым корнем). Следовательно, это число не может быть квадратом, и вот по какой причине: цифровой корень всех квадратов, начиная с 1, всегда равен 1, 4, 7 или 9 и не может равняться никакому другому числу. В действительности, ряд 1, 4, 9, 7, 7, 9, 4, 1, 9 будет повторяться до бесконечности. Аналогичный ряд для треугольных чисел, то есть для чисел вида $(n^2+n)/2$, выглядит так: 1, 3, 6, 1, 6, 3, 1, 9, 9. Таким образом, число не может быть треугольным, если его цифровой корень равен 2, 4, 5, 7 или 8.

1. Пивной бочонок

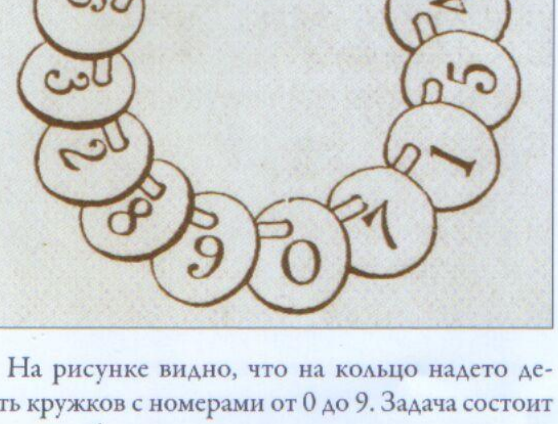
Один человек купил несколько бочек с вином и один бочонок с пивом. Эти бочонки изображены на рисунке. Там же указано, сколько галлонов напитка содержится в каждом бочонке. Он продал часть вина одному покупателю и вдвое больше вина другому, а пиво оставил себе. Задача заключается в том, чтобы указать, в каком из бочонков находится пиво. Сможете справиться с этой задачей? Разумеется, этот человек ничего не подливал в бочонки перед продажей.

2. Цифровое умножение

Приведу еще одну занимательную задачу о девяти цифрах (за исключением нуля). Используя каждую цифру только один раз, можно записать две пары чисел так, что их произведение будет одинаковым. Это можно сделать множеством способов. Например, в парах чисел 7 · 658 и 14 · 329 все цифры содержатся ровно один раз, и в обоих случаях их произведение будет одинаковым и равно 4606. Заметим, что сумма цифр результата 16 — это не наибольшая и не наименьшая возможная сумма. Можете ли вы найти такие числа, чтобы сумма цифр в результате умножения была наибольшей? А наименьшей?

3. Задача о пронумерованных кружках

Когда в одном здании работает много служащих, каждому обычно выдается небольшой кружок с номером. Когда сотрудники приходят на работу, они кладут эти кружки на специальную доску как доказательство того, что они пришли на работу вовремя. Как-то я заметил, что управляющий взял несколько кружков с доски и нанизал их на кольцо, которое носил в кармане. Это навело меня на мысль о неплохой головоломке. Признаюсь читателям, что именно так я всегда придумываю мои задачи. Идею нельзя создать, она возникает сама собой, и нужно просто быть внимательным, чтобы не упустить ее.



На рисунке видно, что на кольцо надето десять кружков с номерами от 0 до 9. Задача состоит в том, чтобы разделить кружки на три группы, не снимая с кольца, так чтобы число, составленное из цифр первой группы, умноженное на такое же число для второй группы, равнялось бы числу для третьей группы, составленному по такому же правилу. Например, цифры можно разделить на три группы так: 2–8907–15463 (для этого нужно передвинуть 6 и 3 к цифре 4). К сожалению, произведение двух первых чисел не равно третьему. Сможете ли вы правильно сгруппировать кружки с цифрами? Разумеется, каждая группа может состоять из любого числа кружков. Чтобы решить эту задачу, вам придется как следует поразмыслить, если только вы не подберете верный ответ случайно.

4. Цифровое деление

Это еще одна прекрасная головоломка, в которой нужно разделить девять цифр (ноль не используется) на две группы так, чтобы получились два числа, такие что первое из них при делении на второе давало бы заданное число без остатка. Например, 13458 при делении на 6729 дает 2. Может ли читатель составить числа так, чтобы результат деления равнялся 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9? Кроме того, сможете ли вы найти минимально возможные числа в каждом из этих случаев? Так, 14658 при делении на 7329 дает 2, как и в примере, который я привел выше, но оба числа в этом случае больше.

5. Цифровые квадраты

Девять цифр расположены так, что образуют квадраты некоторых других чисел: 9, 81, 324, 576. Сможете ли вы объединить их так, чтобы получился один квадрат, сначала наибольший, а затем наименьший из возможных?

Решения

1. Если один покупатель купил в два раза больше вина, чем другой, то общий объем проданного вина должен делиться на 3. Чтобы число делилось на 3, сумма его цифр должна делиться на 3. Сумма цифр для каждой бочки равна 6, 4, 1, 2, 7 и 9 соответственно. Сумма этих чисел равна 29. Это число при делении на 3 дает остаток 2. Сумма цифр числа, равного объему бочки с пивом, должна равняться 2, 2 + 3 = 5 или 2 + 3 + 3 = 8. Единственная бочка, которая удовлетворяет этому условию, — это бочка на 20 галлонов. У торговца осталась бочка на 20 галлонов, он продал первому покупателю 33 галлона (бочки на 15 и 18 галлонов), второму — 66 (бочки на 16, 19 и 31 галлон).

2. Решение, при котором сумма цифр результата является наименьшей: $23 \cdot 174 = 58 \cdot 69 = 4\,002$. Решение, при котором сумма цифр результата является наибольшей: $9 \cdot 654 = 18 \cdot 327 = 5886$. В первом случае сумма цифр равна 6, во втором — 27. Эту задачу можно решить только методом проб и ошибок.

3. Разделим 10 кружков на три группы таким образом: 715–46–32890. Произведение первого и второго чисел равно третьему числу.

4. Будет удобнее рассматривать не произведения, а дроби: половину, третью, четвертую, пятую, шестую, седьмую, восьмую и девятую части. Сначала я приведу восемь ответов:

6729 / 13458 = 1/2,
5823 / 17469 = 1/3,
5942 / 15768 = 1/4,
2697 / 13485 = 1/5,
9943 / 17658 = 1/6,
2304 / 16758 = 1/7,
3187 / 25496 = 1/8,
6581 / 57429 = 1/9.

Сумма цифр в числителе и знаменателе всегда равна 45, цифровой корень равен 9. Если мы разделим девять цифр на две группы произвольным образом, сумма цифровых корней всегда будет равна 9. Более того, два цифровых корня будут соответственно равны 9–9, 8–1, 7–2, 6–3 или 5–4. В первом случае сумма цифр равна 18, но цифровой корень этого числа равен 9. В тех случаях, когда одно число равно третьей, четвертой, шестой, седьмой и девятой части другого, цифровые корни будут равны 9–9. Иными словами, цифровой корень и числителя, и знаменателя должен равняться 9. Когда одно число равно половине или пятой части другого, цифровые корни будут равны 6–3. Разумеется, бóльший корень может соответствовать как числителю, так и знаменателю. Например, 2697/13 485, 2769/14 865, 2973/14 865 и 3729/18 645. В первых двух случаях цифровые корни числителя и знаменателя соответственно равны 6 и 3, в третьем и четвертом случае — 3 и 6. Наиболее интересный из всех случаев тот, при котором одно число равно восьмой части другого. Здесь цифровые корни могут принимать любое из пяти значений, упомянутых выше.

Если мы будем рассматривать знаменатели дробей как числа, умноженные на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 соответственно, то нужно будет обратить внимание на перенос в следующий разряд. Чтобы получить пятизначный результат умножения, нам потребуется выполнить по меньшей мере один перенос после умножения последней цифры слева. Если множитель больше 4, то мы будем переносить значение в следующий разряд как минимум три раза. Как следствие, начиная с того случая, когда одно число в пять раз больше другого, и заканчивая случаем, когда одно число в девять раз больше другого, мы не сможем получить различные решения простой попарной перестановкой цифр, как, например, в случае с 5832/17 496 и 5823/17 469, где 2/6 и 3/9 меняются местами. Разумеется, одни и те же цифры часто можно располагать по-разному, как, например, пары значений, приведенные в предыдущем абзаце. Однако в этом случае нужно полностью менять порядок цифр, и ограничиться простой попарной перестановкой не получится. Есть и другие детали, которые сможет заметить любой читатель. Например, цифра 5 никогда не может занимать крайний правый разряд числителя, так как в этом случае знаменатель должен будет заканчиваться на 0 или снова на 5. Аналогично, в последнем разряде не может находиться 1 или 6 в случае, когда результат деления равен шести. Также в последнем разряде числителя не может быть четная цифра, когда результат деления равен пяти, и так далее. Несмотря на приведенные мной указания, вам придется потратить много времени на перебор вариантов, однако в итоге вы придете к правильному ответу.

5. Насколько мне известно, таблицы квадратных чисел, которые могли бы пригодиться при решении этой головоломки, не публиковались. Наименьший квадрат, в записи которого содержатся все цифры по одному разу, равен 139 854 276. Это квадрат числа 11 826. Наибольший квадрат, удовлетворяющий этим же условиям, равен 923 187 456. Это квадрат числа 30 384.

Эдуард Люка
Лабиринты

Эдуард Люка

Эдуард Люка родился в 1842 году в городе Амьен на севере Франции. Окончив Политехническую школу и Высшую нормальную школу, в 1864 году он получил должность помощника астронома в Парижской обсерватории. Позднее он занял пост преподавателя математики в лицеях Сан-Луи и Шарлемань. Эдуард Люка был увлеченным любителем математики. Выдающийся лектор, он опубликовал свыше двухсот статей в научных журналах, поддерживал дружеские отношения со многими математиками Франции и других стран и был вице-президентом Французского математического общества. Люка также способствовал популяризации занимательной математики: он опубликовал несколько статей и книг, состоял в переписке с профессиональными математиками и математиками-любителями и создал несколько прекрасных головоломок (в частности, «Ханойские башни»).

Первой книгой Люка стала Récréations Mathématiques («Математические развлечения»). В этой книге он рассмотрел множество тем из области занимательной математики и дополнил их новыми задачами. В это же время Люка работал над более серьезными книгами. Одна из них была посвящена теории чисел, вторая представляла собой собрание сочинений гениального математика Пьера Ферма. Люка умер 3 октября 1891 года, когда было опубликовано всего два тома его «Математических развлечений». Его друзья по Французскому математическому обществу Деланнуа, Лесан и Лемуан опубликовали третий и четвертый тома этой книги, которые Люка лишь немного не успел закончить.

Мальчик-с-пальчик. Нить Ариадны

Вообразите, что вы заблудились в коридорах лабиринта, в ответвлениях шахты, в проходах катакомбы или на тропинках сумрачного леса. У вас в руках нет ничего, что было бы похоже на нить Ариадны, и вы не знаете, куда идти, как Мальчик-с-пальчик, который бросал крошки на землю, чтобы найти обратный путь, но их съели птицы. Как найти выход из лабиринта, шахты, катакомб и темного леса? Мы покажем, что потерянную тропу можно отыскать в любом лабиринте.

Геометрическая формулировка задачи о лабиринтах

Перекрестки коридоров лабиринта можно считать точками; проходы, переходы и галереи — прямыми или кривыми линиями, попарно соединяющими точки. Будем говорить, что эти точки и линии образуют геометрическую сеть или лабиринт, если подвижная точка, помещенная на одну из линий сети, может переместиться в любую другую точку, следуя вдоль линий сети. Докажем, что эта подвижная точка может последовательно пройти по всем линиям сети без прыжков и не проходя ни по одной из линий больше двух раз. Иными словами, мы докажем, что из любого лабиринта всегда есть выход.

Будем действовать так: нарисуем на чистом листе бумаги произвольное число точек и соединим их попарно любым количеством прямых или кривых линий так, чтобы ни одна точка не оказалась отделенной от остальных. Получим геометрическую сеть. Можно нарисовать схему линий автобусов и трамваев большого города, сеть железных дорог страны или сеть рек и каналов, соединив произвольным образом границы и побережья. Накроем наш рисунок листом непрозрачного картона. Проделаем в нем отверстие (назовем его окуляром), через которое будет видна лишь малая часть сети. Сдвинем лист картона так, чтобы окуляр был расположен над перекрестком А. Попробуем передвигать лист так, чтобы окуляр прошел два раза над всеми линиями сети и снова вернулся в точку А. Чтобы запомнить, по каким линиям прошел окуляр, будем помечать пройденные линии небольшой поперечной чертой на входах и выходах перекрестков. После того как мы закончим обход лабиринта, каждая линия будет помечена два раза, но не больше.

Путник, потерявшийся в настоящем лабиринте или шахте, должен будет помечать вход в каждый пройденный перекресток и выход из него.

Решение Тремо

Среди многочисленных решений этой любопытной геометрической задачи мы представим наиболее простое и элегантное, которое прислал нам господин Тремо, инженер и бывший выпускник Политехнической школы. Мы слегка изменили приведенное им доказательство.

Первое правило. Находясь на исходном перекрестке коридоров, выберем любой путь, пока он не приведет нас в тупик или к другому пересечению коридоров: 1. Если выбранный нами путь окончился тупиком, мы можем вернуться назад тем же путем и исключить пройденный нами путь, так как мы прошли его дважды. 2. Если путь привел нас к пересечению коридоров, выберем любой из них произвольным образом и отметим вертикальной чертой путь, по которому мы пришли (указан стрелкой *f*), и путь, которым мы пойдем дальше (указан стрелкой *g*, см. рис. 1).

Рис. 1

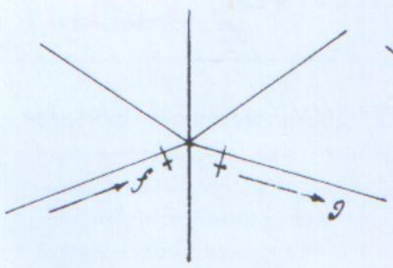
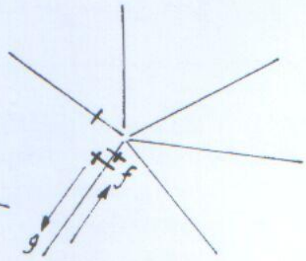


Рис. 2



Чтобы отличить старые метки от новых, на этом и трех следующих рисунках мы будем добавлять к новым меткам еще одну горизонтальную черту.

Будем следовать первому правилу всякий раз, когда будем приходить к пересечению коридоров, где мы еще не были. Спустя некоторое время мы непременно придем к перекрестку, где уже были, и в этом случае возможны две ситуации: либо мы уже проходили тем коридором, по которому пришли к этому перекрестку, либо нет. В зависимости от этого будем применять второе или третье правило:

Второе правило. Если мы пришли к пересечению коридоров, на котором уже побывали до этого, нужно вернуться обратно тем же путем, пометив его двумя чертами, как показано на рис. 2.

Третье правило. Если мы пришли к пересечению коридоров, где уже побывали до этого, уже пройденным путем, то нужно следовать либо тем коридором, где мы еще не были, либо, если таких нет, коридором, по которому мы прошли всего один раз. Эти два случая представлены на рисунках 3 и 4.

Рис. 3

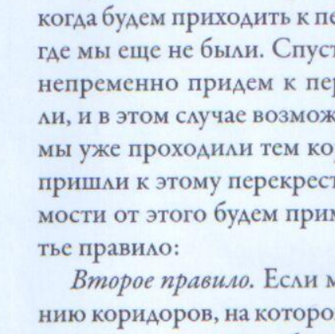
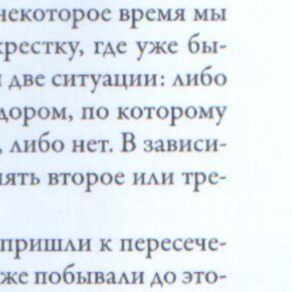


Рис. 4



Доказательство. Если четко следовать вышеуказанным правилам, мы обязательно пройдем все коридоры лабиринта дважды. Заметим следующее:

I. Пусть изначально мы находимся на пересечении коридоров A. Пометим его одной чертой.

II. При прохождении любого пересечения коридоров в соответствии с правилами на стены этих коридоров будут нанесены две новые метки.

III. В любой момент времени до того как мы пришли к очередному перекрестку или же только что вышли из него, коридоры, сходящиеся в начальном пересечении, будут иметь нечетное число пометок, коридоры во всех остальных пересечениях — четное число пометок.

IV. В любой момент времени в начальном перекрестке может сходиться не более одного коридора с одной чертой. В любом другом перекрестке будут сходиться максимум два коридора, помеченные одной чертой.

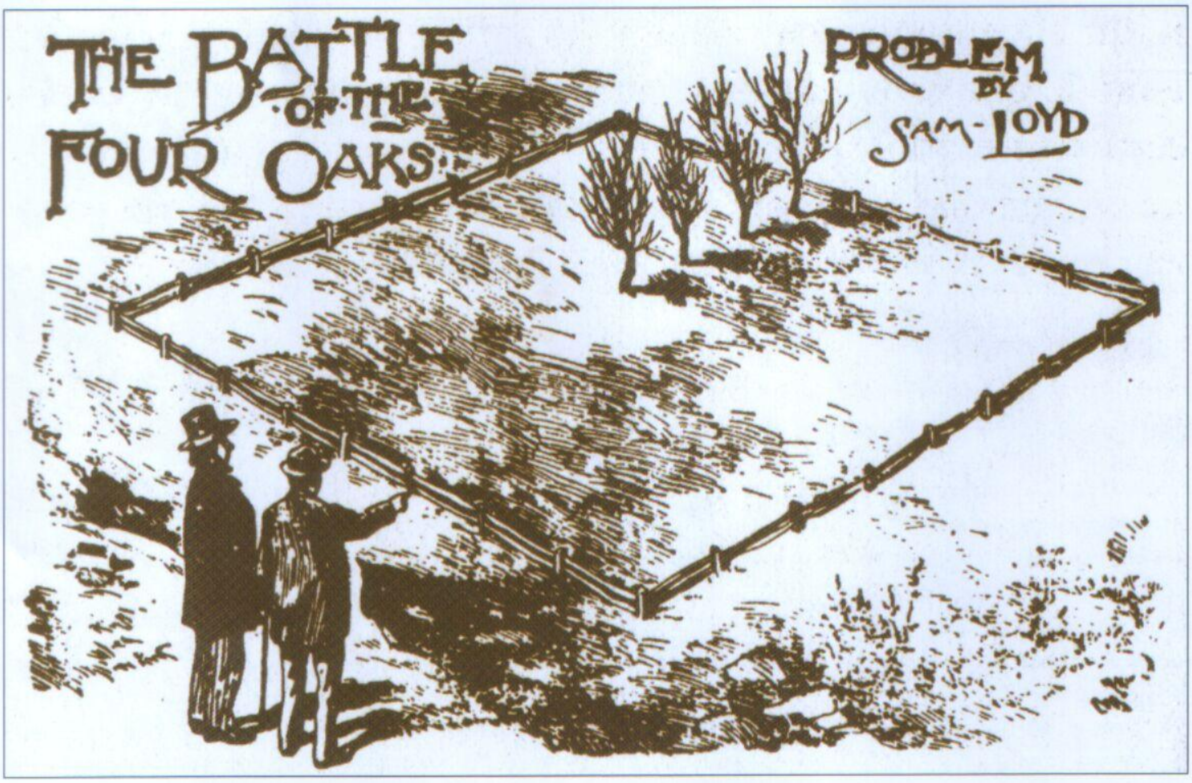
V. По завершении обхода все коридоры во всех пересечениях будут отмечены двумя чертами (это следует из условия).

С учетом этого нетрудно видеть, что всякий раз, когда путник приходит к новому перекрестку коридоров M, отличному от исходного A, он не попадет в безвыходную ситуацию, если будет следовать правилам. В самом деле, он не может прийти в точку M несколькими новыми коридорами сразу или несколькими путями, пройденными до этого один раз. В первом случае нужно следовать первому или второму правилу. Во втором случае путь, которым пришел путник, помечен нечетным числом меток; следовательно, согласно пункту III, непройденных коридоров не останется, и путнику нужно будет последовать коридором, отмеченным одной чертой.

Таким образом, путник окажется в затруднительной ситуации только когда вернется в исходную точку A. Пусть ZA — путь, которым он вернулся в эту точку из перекрестка коридоров Z. Путник уже следовал этим путем раньше; если это не так, у него не возникнет затруднений и он продолжит путь, руководствуясь правилами. Так как путь ZA уже был пройден, на пересечении коридоров Z нет ни одного коридора, который не был бы пройден, иначе это означало бы, что мы забыли применить первый случай третьего правила. С другой стороны, согласно примечанию IV, кроме ZA должен существовать один и только один путь YZ, пройденный ровно один раз. Следовательно, к тому моменту, когда путник остановится в точке A, все коридоры, пересекающиеся в точке Z, уже были пройдены дважды. Аналогично все коридоры, сходящиеся в предыдущей точке Y, были пройдены дважды, равно как и все коридоры, сходящиеся в остальных точках. Именно это и требовалось доказать.

ПРИМЕЧАНИЕ. В случае, когда речь не идет о «закрытом» пересечении коридоров, второе правило можно заменить следующим. Если мы приходим новым путем в перекресток, где мы уже были, мы можем выбрать новый коридор с одним условием: мы должны будем пометить пройденные нами коридоры буквами *a* и *a'*. Если мы вернемся к этому перекрестку еще раз по одному из этих двух коридоров, нужно будет выбрать оставшийся из них. Мы словно перебросим над этим перекрестком мост *aa'*. Это правило сообщил нам господин Морис, бывший выпускник Политехнической школы.

Деревенские задачи



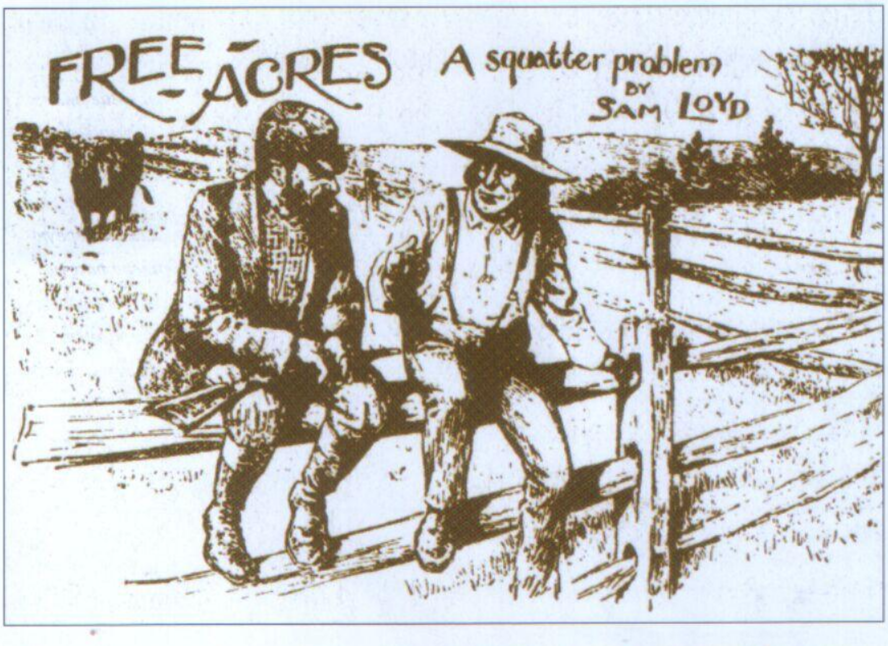
◄ *Разделите участок на четыре равных части. В каждой части должно находиться одно дерево.*

1. Битва у четырех дубов

Город Четырех Дубов носит это название с тех самых пор, когда один из первых жителей, владелец большого участка земли, оставил его в наследство своим четырем сыновьям, предупредив, что участок следует «разделить на равные части так, как указывают четыре древних дуба, которые всегда служили межевыми знаками».

Наследники не смогли договориться, как разделить участок, поскольку четыре дуба не дали им никакой подсказки. Они обратились к судье и потеряли все наследство в так называемой битве у четырех дубов. Тот, кто рассказал мне эту историю, полагал, что она может стать основой для хорошей головоломки. Так и произошло.

На иллюстрации изображены квадратное поле и четыре дуба, расстояние между которыми одинаково. Они посажены в ряд, который начинается в центре поля, а заканчивается у его границы. Отец оставил землю в наследство сыновьям, указав, что поле следует разделить на четыре участка одинаковой формы и размера так, чтобы на каждом участке оказалось одно дерево. Я придумал эту головоломку на ходу, поэтому ее решение не должно представлять трудностей. Тем не менее, скажу, что не всем удается найти лучшее решение.



▲ *Сможете ли вы огородить участок площадью в столько акров, сколько секций длиной в 12 футов будет в изгороди?*

2. Бесплатная земля

Эта прекрасная задача была составлена в Техасе, штате одинокой звезды. Это знаменитая и древняя задача, в которой также описывается один из эпизодов американской истории, с которой должны быть знакомы мои читатели. Техас был почти полностью колонизирован, или, точнее, завоеван, американцами в далеком 1830 году, но лишь после 15 лет сражений с мексиканцами и индейцами он был принят в состав Соединенных Штатов. Вскоре после этого вступил в силу знаменитый закон, согласно которому любой колонист имел право бесплатно завладеть любым участком земли, который он мог обработать в течение года.

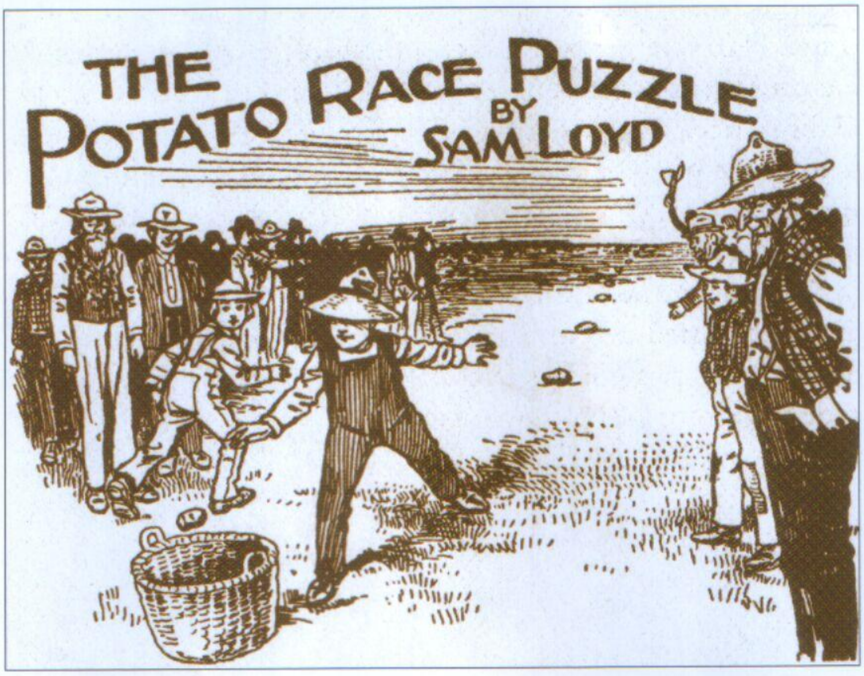
Некоторые из первых поселенцев пережили тяжелые времена, но те, кому удалось выстоять, сегодня входят в число сельскохозяйственных королей. Согласно недавно опубликованному официальному заявлению, некоторые из богатейших землевладельцев мира — индейцы. Среди великих ранчо Запада, хозяев которых не удивляли стада «белых и крапчатых быков, пасущихся на равнинах Сицилии», как возвышенно писал Архимед, выделяется ранчо метиса Техасца Пита. Он был в числе первых, кто занял землю после выхода нового закона, согласно которому любой имел право на участок земли.

По его словам (он и сейчас находится в здравом уме и твердой памяти, хотя ему перевалило за 70), он с супругой получил в собственность всю землю, которую они смогли огородить за 12 месяцев. То есть в течение года они с супругой непрерывно строили забор.

На основе его рассказа я придумал любопытную задачу. Допустим, участок имеет форму квадрата и окружен забором с тремя перекладинами, как показано на рисунке. Пусть каждая секция имеет в длину ровно 12 футов. Если предположить, что площадь участка составляет столько акров, сколько секций из 12 футов имеется во всем заборе (напомню, что акр равен 43 560 квадратным футам), сколько акров составляет площадь ранчо Техасца Пита?

3. Игра в картошку

В старину ни одна сельская ярмарка не обходилась без игры в картошку, а в некоторых местах эта игра до сих пор популярна среди сельских детей и молодежи. На землю по прямой линии выкладывается 100 картофелин, расстояние между ними равняется 10 футам. В 10 футах позади первой картофелины ставится корзина. Два игрока становятся у корзины и бегут к первой картофелине. Тот, кто забирает первую картофелину, должен вернуться обратно и положить ее в корзину, в то время как второй игрок бежит ко второй картофелине. Таким образом, в итоге все картофелины оказываются в корзине. Побеждает тот, кто первым опустит в корзину пятидесятую картофелину.



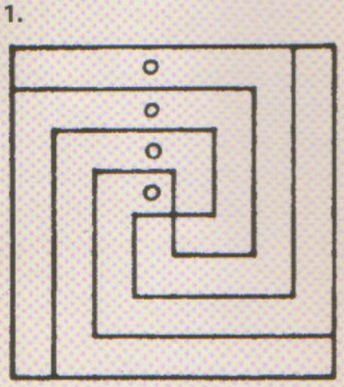
▲ *Кто из ребят выиграет забег?*

Первая задача состоит в том, чтобы вычислить расстояние, которое пробежит игрок, чтобы по очереди собрать все сто картофелин и положить их в корзину. Во второй, намного более сложной задаче, речь идет о забеге Тома и Гарри. Том быстрее Гарри на 2,04 %, поэтому последнему разрешили выбрать одну картофелину и опустить ее в корзину до начала забега. Другими словами, чтобы выиграть забег, Том должен собрать 50 картофелин раньше, чем Гарри удастся собрать недостающие 49. На иллюстрации изображен Гарри, который бросает в корзину выбранную им картофелину.

В зависимости от того, какую картофелину он выберет, результат забега будет отличаться. Сможете определить, какую картофелину должен выбрать Гарри, чтобы максимально увеличить свои шансы на победу, и как завершится забег, если Гарри не ошибется с выбором?

Решения

1.



2. Любопытно, что ответ к задаче равен числу квадратных футов в акре, то есть 43 560. Этим числом секций можно огородить квадрат площадью ровно в 43 560 акров.

3. Чтобы собрать все 100 картошин, нужно пробежать 101 000 футов, то есть чуть больше 19 миль!

Лучшим выбором Гарри будет картофелина под номером 99. Том, который на 2,04 % быстрее него, подберет первую картофелину, Гарри — вторую, Том — третью и так далее. Том недостаточно быстр, чтобы подобрать две соседние картофелины. Чтобы собрать 49 картофелин, Гарри нужно будет пробежать 49 980 футов. За это время Том пробежит 50 999,592 фута. Чтобы собрать 50 картофелин, ему нужно будет пробежать 51 000 футов, поэтому Гарри опередит его менее чем на полфута!

• • •

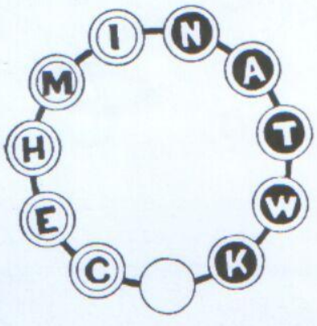
Генри Э. Дьюдени
Головоломки с фишками

Игра в кости и веселые девицы
нарядили меня в такой костюм.
Шекспир. Зимняя сказка. Действие IV, сцена 3

1. Задача Твикенхэма

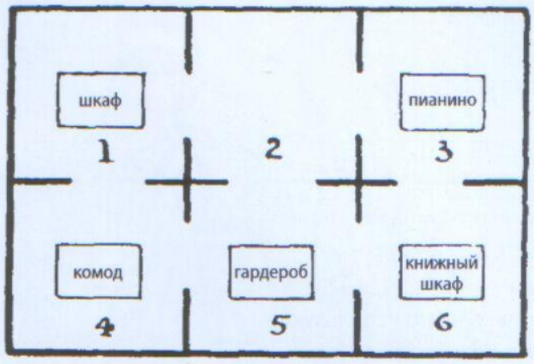
На иллюстрации изображены 11 фишек, расположенных по кругу. Пять из них — белые с черными буквами, пять других — черные с белыми буквами. Место, которое должна была занять нижняя фишка, осталось пустым. Нужно расположить фишки так, чтобы по часовой стрелке можно было прочитать слово Твикенхэм (Twickenham) — старинное название одного из районов Лондона. Черные фишки перемещаются по часовой стрелке, белые — против часовой. Фишка может перепрыгивать через фишку другого цвета, если рядом находится пустое место.

Так, если сначала мы сдвинем K, то C может перескочить через K. Если затем мы сдвинем K в сторону E, W сможет перескочить C и так далее. Задачу можно решить за 26 ходов. Напомню, что фишки могут перепрыгивать только через фишки другого цвета.



2. Трудности на отдыхе

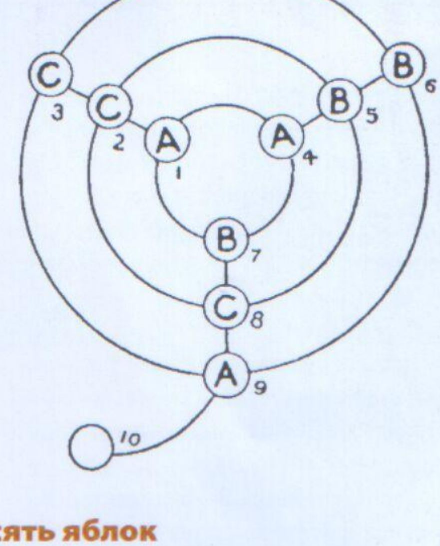
Семейство Добсон снимало комнаты в курортном городе. На одном этаже находилось шесть комнат, соединенных между собой так, как показано на схеме. Комнаты с номерами 4, 5 и 6 выходили окнами на море. Однако возникла небольшая проблема. Господин Добсон настаивал, чтобы пианино перенесли в комнату, где находился книжный шкаф, а книжный шкаф — в комнату, где стояло пианино. Это было мерой предосторожности: Добсоны не любили музыку и не хотели, чтобы кто-то играл на пианино. Комнаты были очень маленькими, мебели было слишком много, и два предмета мебели не умещались в одной комнате одновременно. Как поменять пианино и книжный шкаф местами за наименьшее число перестановок? Допустим, например, что сначала мы переместим гардероб в комнату № 2. Затем мы сможем перенести книжный шкаф в комнату № 5, пианино — в комнату № 6 и так далее.



Это очень интересная задача, но хозяйке пансиона она не понравилась. Попробуйте решить эту задачу за наименьшее число ходов, используя карточки из бумаги.

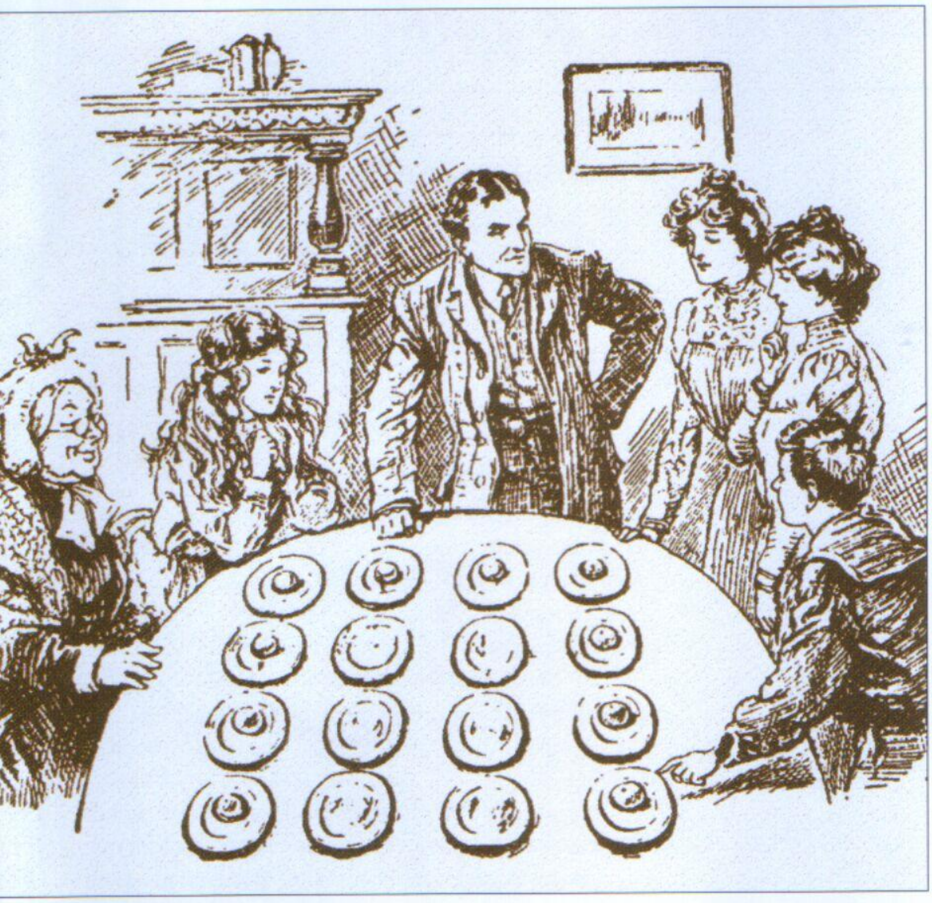
3. Железнодорожная задача

Нарисуйте схему, изображенную ниже, на большом листе и обозначьте три фишки буквой A, три — буквой B, три — буквой C. Вы увидите, что на пересечениях линий находится девять остановок, а десятая остановка находится за пределами большого круга. Расположите три фишки (или локомотива) A, три фишки B и три фишки C в обозначенных местах. Задача заключается в том, чтобы поочередно переместить локомотивы по рельсам, остановка за остановкой, так, чтобы в каждом круге находилось по одной фишке A, B и C и на каждой прямой также находилось по одной фишке A, B и C. Задачу нужно решить за минимально возможное число ходов. Сколько ходов для этого потребуется?



4. Десять яблок

Семейство, изображенное на рисунке, наслаждается этой простой, но очень интересной небольшой задачей. Как видите, на столе стоит 16 тарелок, которые образуют квадрат, и в 10 тарелках лежит



по одному яблоку. Нужно определить, как убрать из тарелок все яблоки, кроме одного, совершая ходы, как в шашках (яблоко может перепрыгнуть соседнее яблоко, если затем окажется на пустой тарелке), точнее как в солитере, так как ходы по диагонали запрещены.

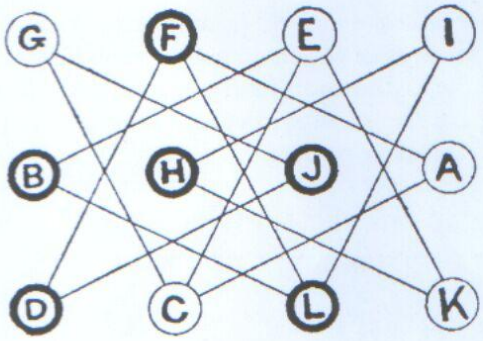
Очевидно, что при таком расположении яблок, как показано на рисунке, ни одного хода сделать нельзя. Однако перед началом игры можно переложить любое яблоко в пустую тарелку. Все ходы должны быть прыжками. Яблоко, через которое перепрыгнуло другое яблоко, снимается с тарелки.

5. Задача об обмене

Перед вами прелестная головоломка с фишками. Вам потребуется всего 12 фишек: шесть одного цвета, обозначенных A, C, E, G, I и K, и шесть другого, обозначенных B, D, F, H, J и L. Сначала расположите их так, как показано на рисунке. Задача состоит в том, чтобы расположить фишки в алфавитном порядке:

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L

Разрешается менять местами фишки разного цвета, расположенные на одной линии. Так, можно поменять местами G и J или F и A, но нельзя поменять G и C или F и D, так как в первом случае обе фишки белые, во втором — обе черные.



Сможете решить задачу за 17 ходов? Решить ее за меньшее число ходов нельзя. Если немного подумать, выяснится, что головоломка намного легче, чем кажется.

Решения

1. Переместите фишки в следующем порядке и получите слово Twickenham: K C E K W T C E H M K W T A N C E H M I K C E H M T. На каждом ходу будет очевидно, что нужно сделать — совершить прыжок или переместить фишку на соседнее пустое место.

2. Чтобы получить кратчайшее решение, нужно передвигать мебель в таком порядке: пианино, книжный шкаф, гардероб, пианино, шкаф, комод, пианино, гардероб, книжный шкаф, шкаф, гардероб, пианино, комод, гардероб, шкаф, книжный шкаф, пианино. Вам потребуется 17 перестановок. Владелица пансиона затем сможет передвинуть комод, гардероб и шкаф. Пока пианино будет надежно закрыто, для господина Добсона не будет иметь значения, что гардероб и комод поменяли местами.

3. Эту головоломку можно решить всего в девять ходов. Переместите локомотивы так: 9–10, 6–9, 5–6, 2–5, 1–2, 7–1, 8–7, 9–8, 10–9. Локомотивы A, B и C будут находиться в каждом их трех кругов и на каждой из трех прямых линий. Это самое короткое решение.

4. Пронумеруем тарелки в горизонтальных рядах сверху вниз так: (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (9, 10, 11, 12), (13, 14, 15, 16). Переместите яблоко из тарелки 8 в тарелку 10 и совершите следующие ходы (не забудьте убирать яблоко, через которое перепрыгнули): 9–11, 1–9, 13–5, 16–8, 4–12, 12–10, 3–1, 1–9, 9–11.

5. Поменяйте следующие пары местами: h–k, h–e, h–c, h–a, i–l, i–f, i–d, k–l, g–j, j–a, f–k, l–e, d–k, e–f, e–d, e–b, b–k. Вы увидите, что, хотя белые фишки можно поместить на свои места всего за 11 ходов, черные нельзя расставить по местам менее чем за 17 ходов. Поэтому нужно сделать несколько дополнительных ходов белыми фишками, чтобы уравнять число ходов. Следовательно, решить задачу меньше чем за 17 ходов нельзя. Разумеется, некоторые ходы взаимозаменяемы.

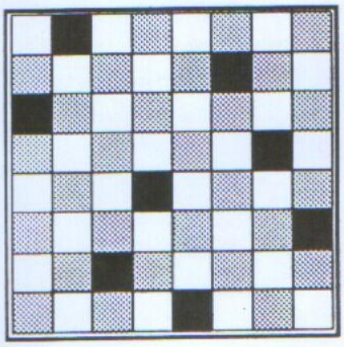
Задача о восьми ферзях

Задача, которую мы попробуем решить, звучит так: нужно определить все варианты расположения восьми ферзей на шахматной доске так, чтобы ни один из них не находился под боем другого. Иными словами, нужно расставить восемь ферзей на доске так, чтобы никакие два из них не располагались на одной вертикали, горизонтали или диагонали.

Условные обозначения

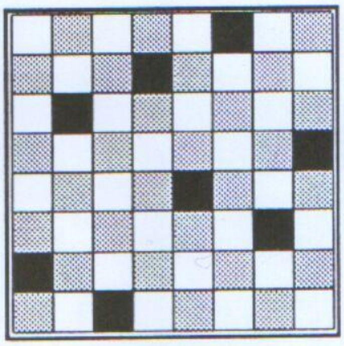
Будем обозначать положение ферзей на доске черными клетками, расположенными поверх белых или серых клеток доски. На рисунке 1 представлено одно из решений задачи.

Рис. 1



Позиция I

Рис. 2



Позиция II

Будем обозначать это решение восемью цифрами 68241753. Первая цифра, 6, обозначает номер клетки в первом столбце доски, считая от нижней границы. Вторая цифра, 8, обозначает, что ферзь расположен в верхней клетке второго столбца, и так далее. Далее для простоты будем называть вертикальные ряды клеток столбцами, горизонтальные ряды — строками. Пронумеруем столбцы от 1 до 8 слева направо, строки — от 1 до 8 снизу вверх. Следовательно, решение, изображенное на рис. 1, можно записать так:

(A)									
	Строки	6	8	2	4	1	7	5	3
	Столбцы	1	2	3	4	5	6	7	8

Для краткости будем записывать это решение восемью цифрами **68241753** — так, как мы объяснили выше. Это число записано в первой строке таблицы, приведенной сверху.

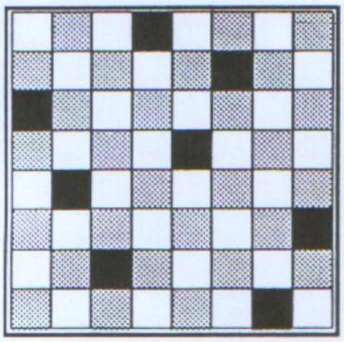
Связанные решения

На рис. 2 изображено первое решение, связанное с решением, показанным на рис. 1. Мы получили это решение, повернув доску на четверть оборота против часовой стрелки. Чтобы получить это решение из первого исключительно с помощью преобразований над числами, достаточно упорядочить столбцы таблицы А так, чтобы цифры в ее первой строке были расположены в порядке убывания:

(A)									
	Строки	8	7	6	5	4	3	2	1
	Столбцы	2	6	1	7	4	8	3	5

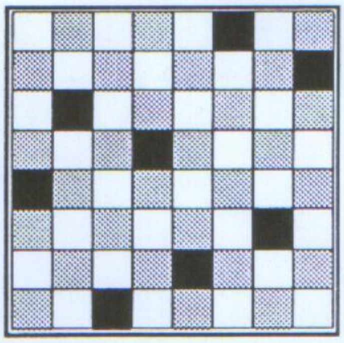
Чтобы получить сокращенную запись второго решения, достаточно записать подряд все цифры, расположенные во второй строке таблицы (B). Получим число **26174835**. На рисунках 3 и 4 представлены второе и третье решения, связанные с тем, что представлено на рис. 1. Они получаются поворотом доски еще на четверть и половину оборота против часовой стрелки.

Рис. 3



Позиция III

Рис. 4



Позиция IV

Решение, изображенное на рис. 3, можно получить с помощью преобразований над числами из позиции II, позицию IV — из позиции III благодаря преобразованию, с помощью которого мы получили позицию II из позиции I. Однако мы также можем получить позицию III из позиции I, а позицию IV — из позиции II следующим образом. Решения, представленные на рисунках 1 и 2, обозначаются числами

68241753 и **26174835**.

Запишем эти же цифры в обратном порядке:

35714286 и **53847162**.

Вычтем каждую из этих цифр из 9 и получим:

64285713 и **46152837**.

Эти числа обозначают решения, изображенные на рисунках 3 и 4.

Нерегулярные и полурегулярные решения

В общем случае произвольному решению задачи о восьми ферзях для любой квадратной доски соответствуют четыре связанных решения. Мы сказали, что так происходит в общем случае, однако для этого необходимо, чтобы рассматриваемое решение было нерегулярным.

На рис. 5 представлено полурегулярное решение задачи о восьми ферзях, имеющее только одно связанное с ним решение.

Рис. 5

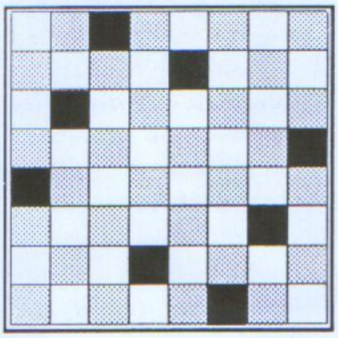
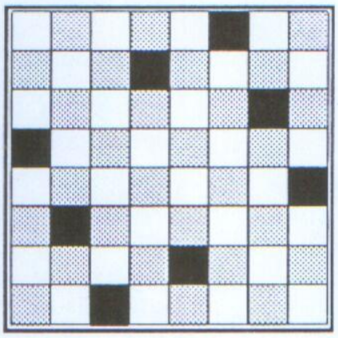


Рис. 6



Действительно, если мы повернем доску на половину оборота, то расположение ферзей не изменится. Число 46827135, которым обозначается это решение, обладает одним свойством: если сложить это число и число, обозначающее решение, полученное поворотом, то их сумма будет равна 99999999.

Регулярные решения

На досках, состоящих не из 64 клеток, из данного решения поворотом доски в некоторых случаях нельзя получить никакого другого решения. Сначала покажем, что используемая нами нотация применима к любым доскам: цифры можно заменить числами, не превосходящими число клеток в рядах доски. Тем не менее, следует отметить, что решение, о котором идет речь и которое мы называем регулярным, может быть представлено в четырех вариантах, то есть с четырех разных «точек зрения» на доску, только тогда, когда число клеток в ряду доски кратно 4, то есть равно 4, 8, 12, 16 (однако доска из 64 клеток не обладает этим свойством), или когда число клеток в ряду доски равно числу, кратному 4, увеличенному на 1.

Такие решения записываются как 2413 (для доски из 16 клеток) и 25314 (для доски из 25 клеток). Будем обозначать полурегулярное решение знаком * после его числовой записи, регулярное решение — знаком **.

Таким образом, получим, например,

46827135*, 2413, 25314**.**

Обратные решения

Рассмотрим произвольное регулярное, полурегулярное или нерегулярное решение задачи о восьми ферзях. Инвертируем порядок расположения фигур в строках или столбцах или, что аналогично, запишем числовое обозначение этого решения или его дополнение до числа 9 в обратном порядке. Так мы получим обратное решение. Нетрудно видеть, что это новое решение будет отличаться от любого связанного решения. Чтобы получить его геометрически, нужно использовать зеркало или развернуть доску. После рассмотрения связанных и обратных решений становится очевидным следующее:

1. Всякому простому нерегулярному решению соответствуют четыре связанных решения и четыре обратных, в сумме восемь решений.

2. Всякому простому полурегулярному решению соответствуют два связанных решения и два обратных, в сумме четыре решения.

3. Всякому простому регулярному решению соответствует единственное связанное и единственное обратное решение, в сумме два решения.

Из этой классификации следует исключить единственное решение задачи о ферзях на доске из одной клетки.

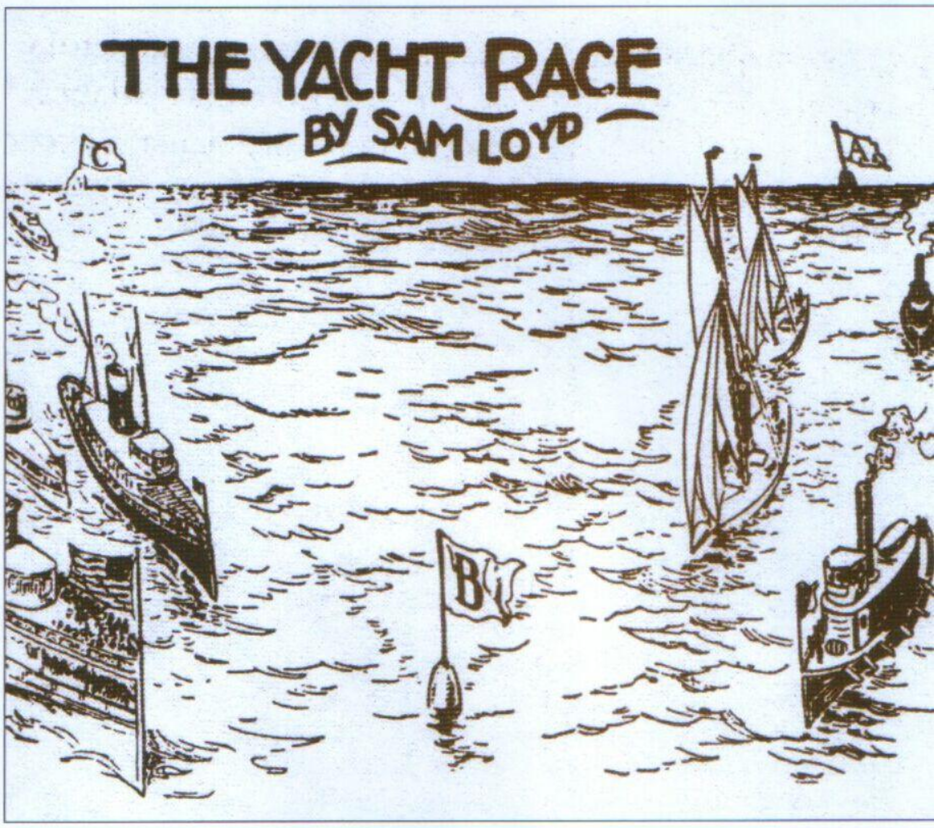
Разные головоломки

1. Парусная регата

На рисунке справа изображены две яхты в момент начала регаты, в ходе которой участники должны описать треугольник, пройдя мимо флагов A, B и C, после чего вернуться к флагу A.

Трое членов экипажа яхты-победительницы пытались определить скорость яхты, но из-за сильного приступа морской болезни им это не удалось. Смит заметил, что яхта прошла первые три четверти дистанции за три с половиной часа. Джонс записал, что яхта прошла последние три четверти дистанции за четыре с половиной часа. Брауну так не терпелось вернуться на берег, что он записал лишь то, что яхта прошла промежуточный участок дистанции (между точками B и C) на десять минут медленнее, чем первый участок.

Считая, что курс яхты представляет собой равносторонний треугольник и скорость яхты на каждом участке дистанции неизменна, определите, сколько времени яхта была в пути.



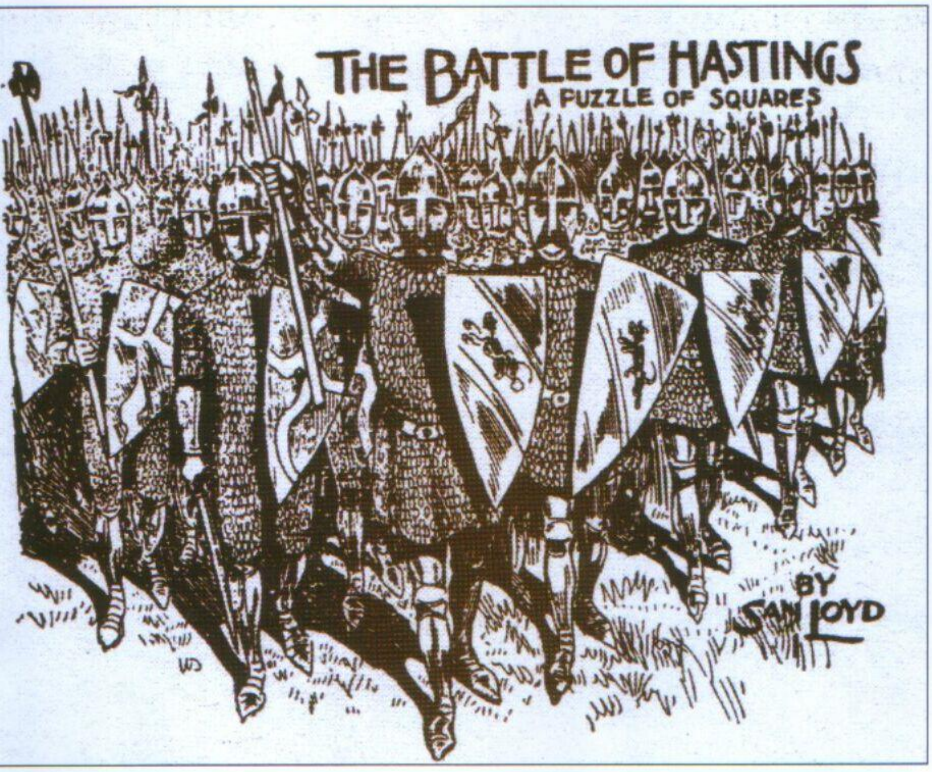
▲ *За какое время яхта прошла положенную дистанцию?*

2. Битва при Гастингсе

Все, кто изучал историю, знают, что памятная битва, произошедшая 14 октября 1066 года, окутана завесой тайны. В данной головоломке рассматривается любопытный эпизод этой битвы, который до сих пор не получил заслуженного внимания.

Профессор Генри Дьюдени пишет: «Люди Гарольда располагались по обычаю плотно, тринадцатью квадратами, в которых находилось одинаковое число людей. Увы тому, кто осмелился бы проникнуть в их редут — лишь удар саксонского боевого топора сумел бы пробить брешь в их рядах! Когда Гарольд сам бросился в бой, саксонцы, выкрикивая боевой клич, образовали единый мощный квадрат».

▼ *Сколько человек было в войске Гарольда?*



Современные исследователи подтверждают, что саксонцы сражались в едином строю. В «Песне о битве при Гастингсе», написанной епископом Ги Амьенским, поется, что «саксонцы стояли твердо плотным строем». Генри Хантингтон писал о «квадрате, подобном крепости, неприступной для норманнов».

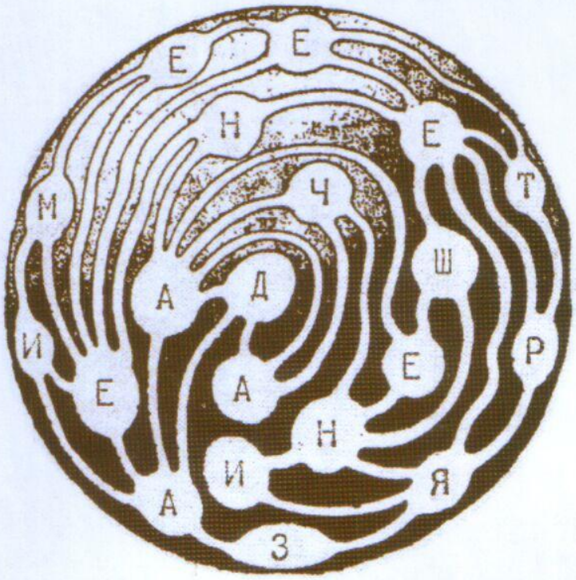
Если войско Гарольда было разделено на тринадцать квадратов, которые затем вместе с самим Гарольдом образовали один большой квадрат, то какова была численность его войска?

Эта головоломка столь сложна, что решить ее удалось лишь немногим математикам.

3. Марсианские каналы

Далее представлена карта городов и каналов, недавно открытых на ближайшей к нам планете — Марсе. Начав путь в городе З у южного полюса, попробуйте обойти все города ровно по одному разу и вернуться в исходную точку.

Когда эта головоломка была впервые опубликована в одном из журналов, более пятидесяти тысяч читателей ответили: «Задача не имеет решения». Тем не менее, эта головоломка очень проста.



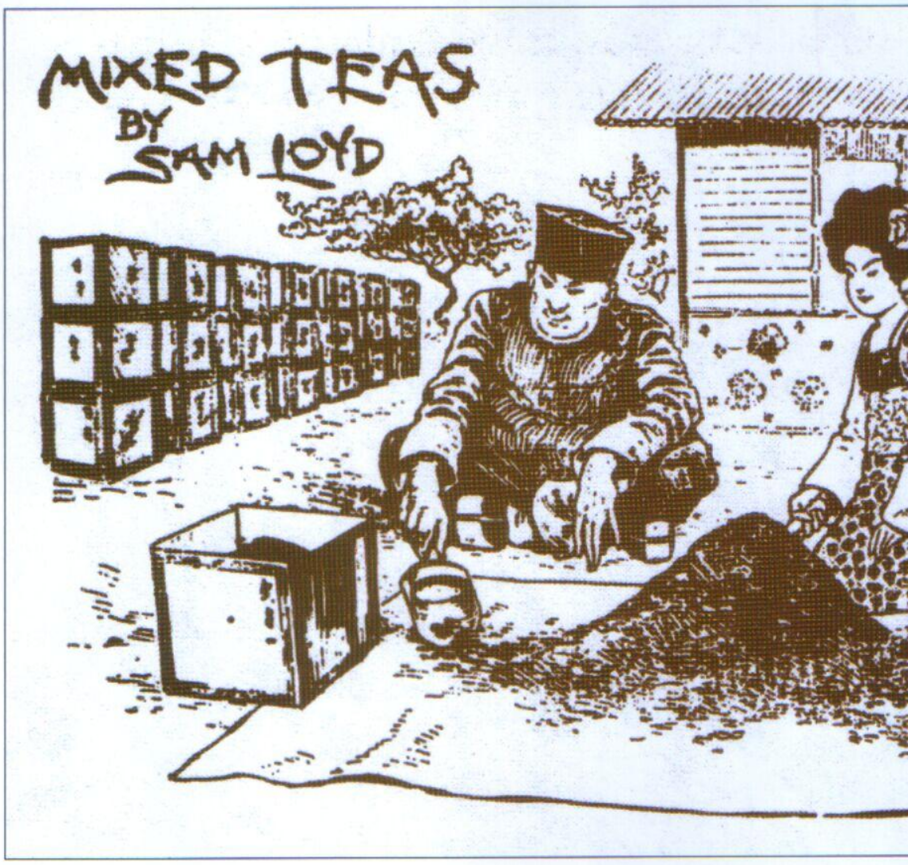
◄ *Обойдите все города ровно один раз и составьте из букв фразу.*

▼ *В каком соотношении мастер смешал черный и зеленый чай?*

4. Смесь разных сортов чая

На Востоке смешивание чая — это столь точная наука, что вес ингредиентов рассчитывается до миллионной доли унции! Говорят, что формулы, известные некоторым плантаторам, держались в секрете сотни лет, и их невозможно воспроизвести.

Только чтобы показать, сколь сложна наука о смешивании чая и сколь непросто разгадать ее тайны, обратим внимание читателя на простую головоломку о двух смесях. Чайный мастер получил два ящика разного размера, имевших форму куба. Внутри большого куба находился черный чай, внутри малого — зеленый. Мастер смешал содержимое ящиков и обнаружил, что смеси достаточно, чтобы наполнить ровно 22 одинаковых сосуда в форме куба. Считая, что внутренние размеры ящиков точно выражаются десятичными дробями, сможете ли вы определить соотношение веса черного и зеленого чая? (Иными словами, найдите два разных целых числа, сумма кубов которых при делении на 22 дает число, кубический корень которого также будет целым числом.)



Решения

1. Первая сторона треугольника была пройдена за 80 минут, вторая — за 90, последняя — за 160. Общее время в пути составило 5,5 часов.

Эту задачу можно решить алгебраически, разделив путь на 12 равных частей и обозначив за x время прохождения первых четырех частей, за $x + 10$ — время прохождения второго отрезка, за y — время прохождения четырех последних дистанций. Записав время в минутах, получим следующие два уравнения, из которых нетрудно найти значения x и y:

$$\frac{x}{4} + x + 10 + y = 270;$$

$$\frac{y}{4} + x + 10 + x = 210.$$

2. Тринадцать отрядов Гарольда представляли собой квадраты со стороной в 180 человек. Таким образом, численность войска составляла 421 200 человек. Вместе с Гарольдом их число составляло 421 201, что позволило образовать один большой квадрат со стороной в 649 человек.

(Взяв задачу из книги британского мастера головоломок Генри Дьюдени, Лойд существенно изменил ее, сделав более простой и в то же время более исторически достоверной. В версии Дьюдени, изложенной в его книге «Математические головоломки и развлечения», упоминается 61 отряд вместо 13. Если бы читатель попытался решить эту задачу, то минимально возможное число людей в отряде составило бы 3 119 882 982 860 264 400, так как сторона каждого квадрата составляла бы 226 153 980 человек. Вместе с Гарольдом войско смогло бы выстроиться в один квадрат со стороной в 1 766 319 049 человек.

3. Пятьдесят тысяч читателей, которые ответили «Задача не имеет решения», на самом деле решили головоломку: если обойти города так, чтобы получилась эта фраза, то вы обойдете их все по одному разу и вернетесь в исходную точку.

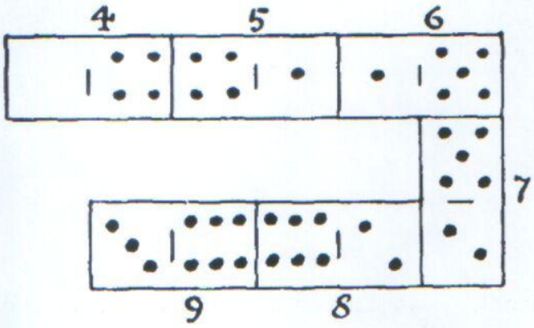
4. Куб со стороной, равной 17,299 дюйма, и куб со стороной 25,469 дюйма имеют общий объем 21 697,794418608 куб. дюйма, что в точности равно общему объему 22 кубов со стороной 9,954 дюйма. Следовательно, зеленый и черный чай нужно смешать в соотношении 17,299 к 25,469.

Генри Э. Дьюдени
Игровые задачи

Маленькая радость от игры.
Мэтью Прайор

1. Цепочка домино

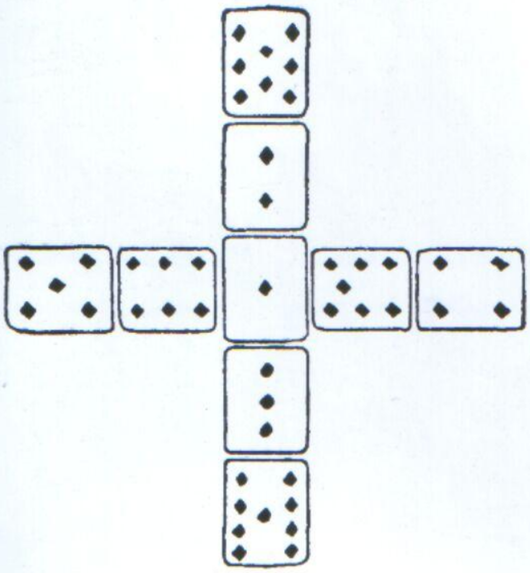
На рисунке изображены шесть костяшек домино, расположенных согласно правилам — 4 к 4, 1 к 1 и так далее. При этом сумма очков на костяшках (4, 5, 6, 7, 8, 9) представляет собой арифметическую прогрессию, то есть разность между соседними суммами равна одному и тому же числу. В данном случае это число 1.



Сколькими способами можно расположить шесть костяшек домино из стандартного набора из 28 костяшек так, чтобы суммы очков на них образовали арифметическую прогрессию? Костяшки следует располагать слева направо, убывающие арифметические прогрессии (например, 9, 8, 7, 6, 5, 4) не допускаются.

2. Карточный крест

Эта головоломка заключается в том, чтобы расположить в форме креста девять игральных карт бубновой масти от туза до девятки так, как показано на рисунке, чтобы при этом сумма очков в вертикальном и горизонтальном рядах была одинаковой.



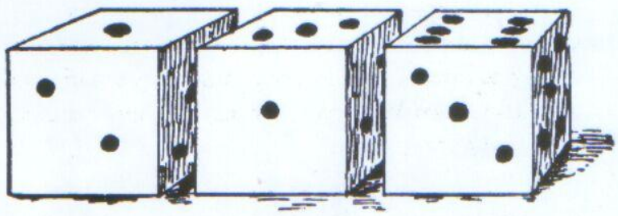
В приведенном примере сумма очков в обоих рядах равна 23. Определите, сколькими способами можно расположить карты так, чтобы это условие выполнялось. Нетрудно видеть, что можно поменять местами 5 и 6, 5 и 7, 8 и 3 и так далее, при этом условие задачи по-прежнему будет выполняться.

Мы также можем поменять горизонтальный и вертикальный ряды местами. Однако эти перестановки столь очевидны, что они считаются не разными решениями, а лишь вариантами одного базового решения. Сколько разных базовых решений имеет эта задача? Разумеется, совершенно не обязательно, чтобы сумма очков в рядах всегда равнялась 23.

3. Фокус с игральными костями

Сейчас я расскажу вам о прекрасном фокусе с тремя игральными костями. Попросите кого-нибудь бросить кубики так, чтобы вы их не видели. Затем попросите вашего помощника умножить очки на первом кубике на 2 и прибавить 5, затем умножить результат на 5 и прибавить к нему число очков на втором кубике, далее умножить полученное число на 10 и прибавить число очков на третьем кубике. Когда он назовет результат, вы сразу сможете сказать, сколько очков выпало на каждом из трех кубиков.

Как это сделать? Например, если выпало 1, 3 и 6, мой помощник назовет число 386, и я сразу же смогу определить, сколько очков выпало на каждом из кубиков.



4. Футболисты

— Футбол — славный спорт! — воскликнул болельщик. — По окончании прошлого сезона из всех известных мне футболистов у четырех была сломана левая рука, у пяти — правая; у двоих была здоровой правая рука, у троих — левая.

Сможете определить минимально возможное число футболистов, которых знал наш болельщик? Из условия задачи не следует, что футболистов было 14, так как, например, двое из тех, кто сломал левую руку, могли быть теми же двумя футболистами, у которых правая рука была здоровой.

Решения

1. Всего существует 23 разных способа. Можно начать с любой костяшки, за исключением 4–4 и тех, на которых есть 5 или 6 очков, однако лишь некоторые костяшки можно будет расположить двумя способами. Если нам дана разность между очками на костяшках домино, то по известной первой костяшке все остальные определяются автоматически. Следовательно, достаточно указать лишь первую костяшку для каждого из 23 вариантов и разницу между очками. Я сделаю это следующим образом. При разнице между очками, равной 1, первой костяшкой может быть любая из перечисленных: 0–0, 0–1, 1–0, 0–2, 1–1, 2–0, 0–3, 1–2, 2–1, 3–0, 0–4, 1–3, 2–2, 3–1, 1–4, 2–3, 3–2, 2–4, 3–3, 3–4. При разнице между очками, равной 2, первой костяшкой может быть 0–0, 0–2 или 0–1. Рассмотрим в качестве примера последний случай. При первой костяшке 0–1 и разнице между очками, равной 2, следующими костяшками будут 1–2, 2–3, 3–4, 4–5, 5–6. Три костяшки нельзя использовать ни в одном из вариантов: это 0–5, 0–6 и 1–6. Для расширенного набора костяшек, где последней костяшкой в наборе является 9–9, существует 40 вариантов решения задачи.

2. Всего имеется 18 основных решений. Я перечислю их ниже, указав число очков на картах только для горизонтального ряда, так как положение остальных карт в этом случае определяется автоматически.

56174	24568
35168	34567
34178	14768
25178	23768
25368	24758
15378	34956
24378	24957
14578	14967
23578	23967

Так как сумма очков является нечетной, карта, расположенная на пересечении рядов, также должна иметь нечетное число очков. Сумму 23, 25 и 27 можно получить четырьмя способами, 24 и 26 — тремя.

3. Достаточно вычесть из указанного числа 250, и три цифры результата укажут, сколько очков выпало на всех трех кубиках. Так, в нашем примере указанным числом является 386. Отняв от него 250, получим 136 и увидим, что на кубиках выпало 1, 3 и 6 очков. Результатом всех арифметических действий будет число $100a + 10b + c + 250$, где a, b и c соответствуют очкам, выпавшим на всех трех кубиках. Таким образом, решение задачи очевидно.

4. Минимально возможное число футболистов — семь. Задача имеет три разных решения:

(1) У двоих футболистов нет травм рук, у одного сломана правая рука, у четырех сломаны обе руки.

(2) У одного футболиста нет травм рук, у одного сломана левая рука, у двух сломана правая, у трех сломаны обе руки.

(3) У двух футболистов сломана левая рука, у трех — правая, еще у двух сломаны обе руки. Если по условию травмированы все футболисты, то последний вариант будет единственно возможным.

Прогулки строем

Прогулки в колонне

Дети идут в колонне один за другим. Как следует построить детей в колонны, чтобы каждый ребенок стоял рядом со всеми остальными ровно один раз?

Обозначим число детей за n. Во-первых, заметим, что если каждый ребенок должен стоять рядом со всеми остальными, то общее число расположений составит $1/2 \cdot n\ (n-1)$ — таково число сочетаний из n по два. Однако каждый ряд допускает $n-1$ «соседств», следовательно, число возможных колонн равно $1/2 \cdot n$. Таким образом, чтобы задача имела решение, число детей должно быть четным. Чтобы построить детей в колонны, обозначим их буквами, припишем еще одну дополнительную букву и сформируем все возможные последовательности из $n+1$ буквы, затем рассмотрим последовательность, к которой мы добавили букву, и удалим ее. Таким образом мы получим все перестановки, требуемые по условию задачи.

НАБЛЮДЕНИЕ. Каждый ребенок окажется отделен от остальных всего один раз, когда окажется в начале или в конце колонны. Можно удвоить число возможных колонн, построив детей в обратном порядке, однако в этом случае каждый ребенок будет стоять по соседству с каждым из остальных ровно два раза: в первый раз, когда колонна будет идти вперед, во второй — когда колонна будет идти назад.

Прогулки в пансионе

В пансионе проживает четное число девушек, которые каждый день прогуливаются парами. Как разбить их на пары так, чтобы каждая девушка поочередно прогуливалась со всеми остальными, но не более одного раза?

Допустим, что в пансионе живет 12 девушек, которых мы обозначим буквами алфавита. Разделим окружность (см. рисунок ниже) на 11 равных частей. Расположим в центре одну из букв, L, остальные буквы — в точках, которые делят

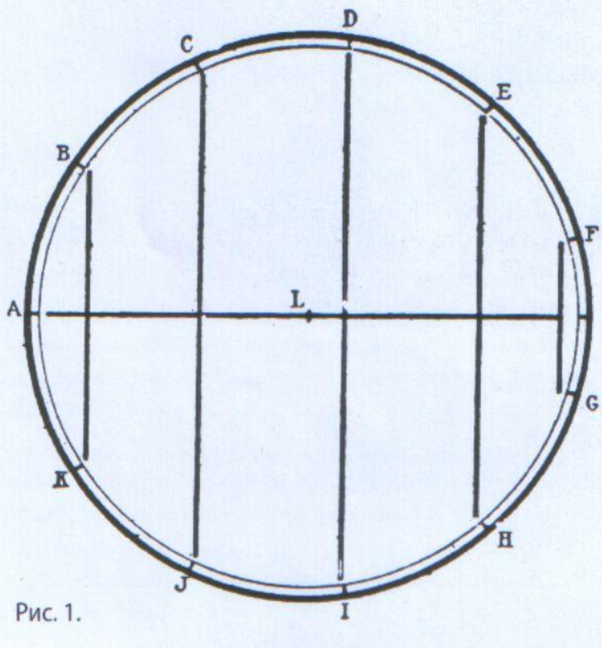


Рис. 1.

окружность на части, произвольным образом. Далее проведем прямые линии так, как показано на рисунке. Объединим девушек в пары для первой прогулки, соединив сначала A с L, затем все остальные буквы параллельными линиями. Таким образом, на первой прогулке состав пар будет выглядеть так:

I. AL, BK, CJ, DI, EH, FG.

Чтобы определить пары для второй прогулки, будем рассматривать множество прямых линий на рисунке как подвижную стрелку, закрепленную в центре, которую мы будем последовательно вращать на одно деление по часовой стрелке, при этом буквы будут оставаться неподвижными. Таким образом мы определим пары для второй прогулки:

II. BL, CA, DK, EJ, FI, GH.

Если мы будем поворачивать стрелку последовательно на одно, два и три деления, получим пары для следующих прогулок:

III. CL, DB, EA, FK, GJ, HI.
IV. DL, EC, FB, GA, HK, IJ.
V. EL, FD, GC, HB, IA, JK

и так далее. Всего мы получим 11 вариантов, в каждом из которых для каждой девушки найдется пара. Теперь осталось показать, что девушки, которые гуляли в одной паре в один из дней, во все остальные дни ни разу не окажутся в одной и той же паре. Для этого нужно рассмотреть два случая: в первом одна из букв, обозначающая девушку, находится в центре окружности, во втором — обе буквы расположены на окружности. Чтобы две буквы, одна из которых находится в центре окружности, принадлежали к одной паре, необходимо и достаточно, чтобы стрелка прошла через вторую букву ровно один раз — именно так и происходит. Чтобы две буквы, расположенные на окружности, принадлежали к одной паре, необходимо и достаточно, чтобы соединяющая их прямая была перпендикулярна направлению стрелки. Направление стрелки, а следовательно, и направление, перпендикулярное ему, во всех 11 случаях различно.

Головоломка

Задачу о прогулках в пансионе также можно решить с помощью головоломки с кубиками. Пусть A, B, ..., K, L — кубики головоломки, которые обозначают девушек. Будем объединять кубики

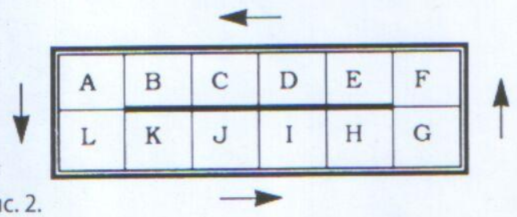


Рис. 2.

в пары по столбцам для каждой прогулки. Для первой прогулки пары будут такими:

AL, BK, CJ, DI, EH, FG.

Чтобы определить пары для второй прогулки, достаточно удалить кубик L, передвинуть кубик A вниз, сместить на одну позицию влево кубики верхнего горизонтального ряда, передвинуть кубик G вверх, затем сместить на одну позицию вправо все кубики нижнего ряда и, наконец, снова поместить кубик L в пустую клетку так, чтобы он оказался на прежнем месте.

Таким образом мы получим те же пары, что и в решении со стрелкой: метод с головоломкой равносилен тому, что мы будем полагать стрелку на рис. 1 неподвижной и в то же время будем вращать саму окружность на одно, два или три деления относительно стрелки в противоположном направлении. Если же считать все хорды окружности равными и заменить окружность прямоугольником, то мы в точности воспроизведем метод с головоломкой.

Воспитательницы

В двух предыдущих головоломках мы предполагали, что число девушек в пансионе четное, в противном случае задача не имеет решения. Тем не менее, для нечетного числа девушек задачу можно изменить следующим образом.

В пансионе проживает нечетное число девушек, которые каждый день прогуливаются парами, за исключением одной, которая играет роль воспитательницы. Как нужно разбить девушек на пары так, чтобы каждая поочередно прогуливалась со всеми остальными ровно один раз и ровно один раз исполнила роль воспитательницы?

Предположив, что девушек 11, разделим окружность на 11 равных частей и воспроизведем рис. 1 без учета буквы L, расположенной в центре. Будем поворачивать стрелку на одно, два, три деления и так далее. Воспитательницу будет обозначать буква, расположенная на конце стрелки, а все остальные девушки окажутся разбитыми на пары хордами, перпендикулярными стрелке.

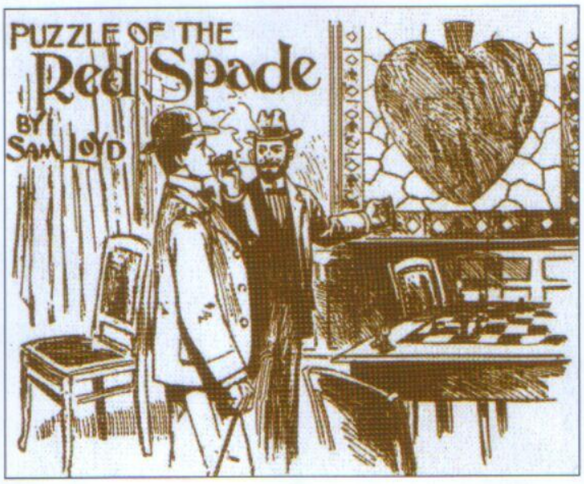
Эта задача выводится из задачи о 12 девушках, если исключить из рассмотрения букву L. Для решения этого варианта задачи также можно использовать метод с головоломкой.

НАБЛЮДЕНИЕ. Если записать все пары девушек вне зависимости от того, является их число четным или нечетным, то мы получим полный список всех возможных сочетаний девушек в пары, что нетрудно подтвердить прямыми подсчетами.

• • •

Лучшее от Сэма Лойда

Головоломки с перестановками



Покажите, как можно превратить символ пиковой масти в символ масти червовой, разрезав его на три части.

1. Задача о красной пике

Во время недавнего визита в Клуб виста и шахмат Кресент Сити мое внимание привлекла красная пика любопытной формы, украшавшая одно из окон зала собраний. Этот узор был выполнен дрезденскими мастерами и, подобно витражам церквей, состоял из множества крохотных кусочков цветного стекла, умело составленных в общую фигуру.

Никто никогда не задавался вопросом о том, почему пика имеет красный, а не привычный черный цвет. Сначала все считали это досадной ошибкой, затем узор полюбился посетителям клуба не только по причине новизны, которую символизировала красная пика, но и потому, что черная пика излишне затенила бы помещение.

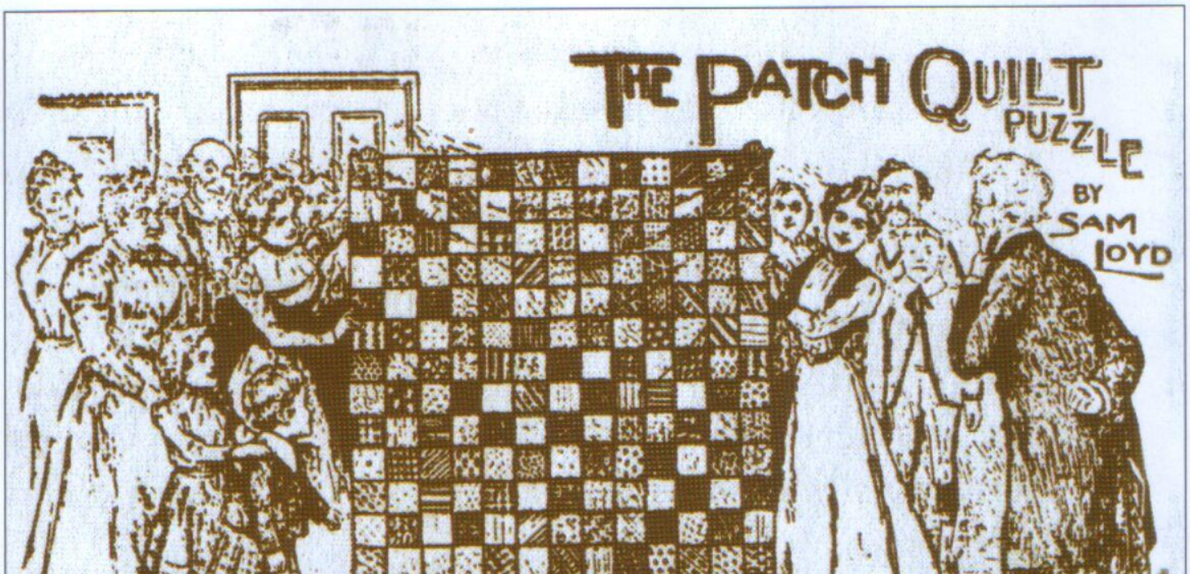
Поняв, что мастер совершил ошибку, так как эмблемой клуба должен был стать туз червей, я решил внимательно рассмотреть окно. Узор был составлен из трех частей, и я быстро обнаружил, что их можно переставить так, чтобы они образовали символ червовой масти, как и было задумано вначале.

Члены клуба настолько привыкли к этой любопытной эмблеме и так обожали ее, что выступили против любых изменений. Тем не менее, эта ситуация вдохновила меня на создание интересной, но простой головоломки.

2. Лоскутное одеяло

На рисунке изображены члены общества волонтеров, которые удивили приходского священника, сшив ему прекрасное лоскутное одеяло в знак любви и признательности. Каждая из участниц общества сшила часть одеяла в форме идеального квадрата, составленного из одного или нескольких маленьких квадратов.

Все дамы хотели, чтобы сшитые ими квадраты непременно стали частью одеяла, поэтому сделать большое одеяло оказалось непросто. Мимоходом замечу, что поскольку все дамы сшили по квадратной части одеяла, вы легко сможете определить их число, когда узнаете минимально возможное число квадратных кусочков, на которые можно разделить одеяло. Это простая головоломка, которая требует немалой доли терпения и смекалки.



Каково минимально возможное число квадратов, состоящих из одного или нескольких кусочков, на которое можно разделить одеяло?

◄ *Определите размеры креста, площадь поверхности которого будет равна площади остальной части флага.*

3. Задача о датском флаге

По завершении бесплодных переговоров Дяди Сэма о покупке Датской Вест-Индии на свет родились различные легенды, связанные с названием этого архипелага Виргинских островов.

Острова Сент-Джон, Сент-Томас и Санта-Крус, входящие в состав Датской Вест-Индии, были в числе первых островов, открытых Колумбом в 1492 году. В течение многих веков эти острова считались малоценными, поэтому никто не стал протестовать, когда группа датчан, потерпевших кораблекрушение, подняла над островами свой флаг. Заняв острова, датчане назвали их по своему обычаю именами святых — покровителей моряков.

Датский флаг встречается редко, поэтому относительно немногие знают, что он представляет собой белый крест на красном фоне. Я никогда бы не подумал, что рисунок флага строится по определенным правилам, согласно которым ровно половина его общей площади должна быть окрашена в белый цвет. Предположим, что флаг имеет пять футов в ширину и семь с половиной в длину. Сможете ли вы найти простое правило, которое позволит найти ширину линий белого креста, который будет занимать точно половину площади флага?

4. Мозаики Гвидо

Немногим известно, что знаменитая венецианская мозаика Доменикино изначально была разделена на две квадратные группы, которые были открыты в разное время. Чтобы восстановить предполагаемую исходную форму, в 1671 году их объединили в одну коллекцию. Скорее всего, по счастливой случайности кто-то заметил, что каждый квадрат состоял из нескольких частей, которые можно было соединить между собой и получить один большой квадрат размером 5 × 5, как показано на рисунке.

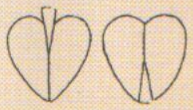
Эту красивую головоломку, подобно многим другим головоломкам и математическим задачам, удобнее решать в обратном порядке. Поэтому мы заменим исходную задачу на противоположную и попросим вас разделить большой квадрат на минимально возможное число частей, которые можно переупорядочить так, что получатся два квадрата. Эта головоломка отличается от пифагорейской задачи, в которой два малых квадрата можно разделить диагональными линиями, чтобы получить большой квадрат. В нашей головоломке разрезы можно проводить только вдоль вертикальных и горизонтальных линий, чтобы не повредить узор мозаики. Также заметим, что тот, кто способен решить пифагорейскую задачу, не испытает особых трудностей при решении этой головоломки и быстро укажет, сколько голов будет содержаться в двух искомых квадратах.

Подобные задачи, в которых требуется найти наименьшее число частей, требуют немалой смекалки. В этой головоломке разрезать головы и поворачивать их нельзя.

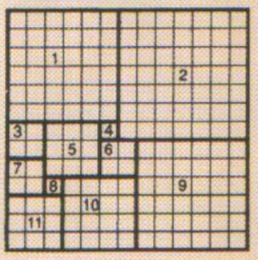
▼ *Разрежьте мозаику на две части, из которых можно составить квадраты.*

Решения

1.

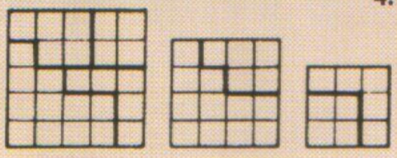


2. На следующем рисунке показано, как можно разделить одеяло 13 × 13 на 11 маленьких квадратов — это минимально возможное число частей, на которые можно разрезать одеяло, не нарушив узора.



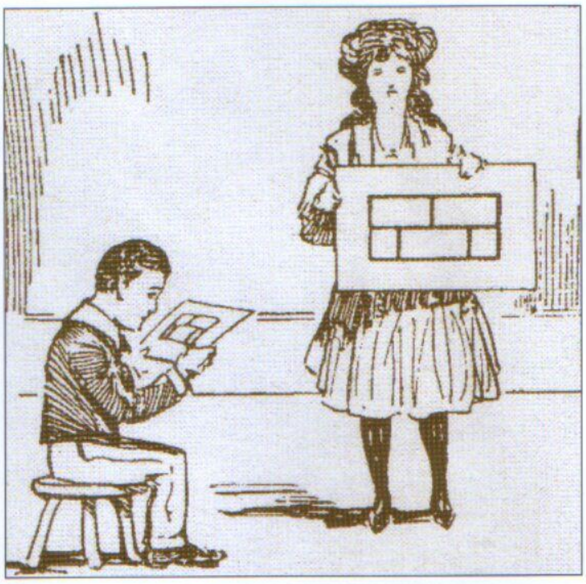
3. Решить эту задачу можно многими математическими методами, однако чтобы упростить решение, я сказал бедным датским морякам, которые не знали ничего о квадратных корнях, что нужно вычесть половину диагонали из четверти периметра флага. Так как периметр флага равен ровно 25 футам, а диагональ равна 9,01388, нужно вычесть 4,50694 из 6,25. В результате получим, что толщина линии креста должна равняться 1,74306 фута.

4.



Генри Э. Дьюдени

Задачи обхода



Я вижу их на их извилистом пути.
Реджинальд Хебер

Разумно предполагать, что с самого зарождения цивилизации человек задавался вопросами: «Каков кратчайший путь к дому?», «Какой путь самый простой и приятный?», «Как найти дорогу и не наткнуться на мастодонта или плезиозавра?», «Как добраться куда нужно, не зайдя на вражескую тропу?». Эти простейшие задачи обхода могут стать прекрасными головоломками, если их несколько усложнить, введя дополнительные условия. Далее вы прочтете несколько подобных усложненных задач. Эти головоломки, позволяющие обобщить некоторые факты о геометрических фигурах, — отличная разминка для ума.

1. Детская головоломка

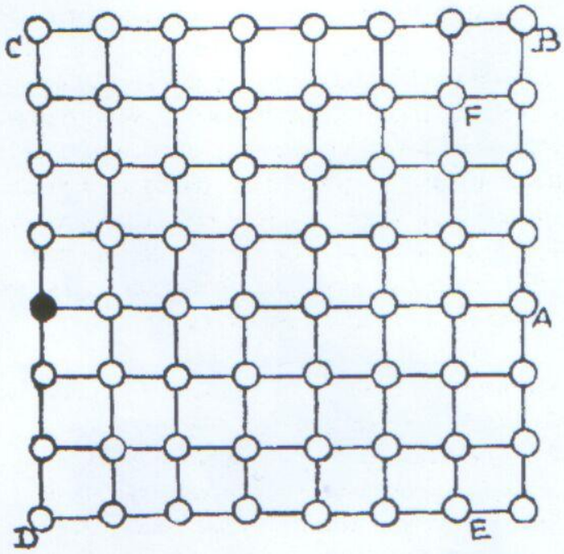
Много лет мои юные друзья спрашивают меня об этой маленькой головоломке. По-видимому, она известна большинству детей, но, что удивительно, никто из них не знает на нее ответа. Дети всегда просят, чтобы я прояснил ее суть. Мне кажется, эту головоломку любил показывать своим маленьким друзьям маг Гудини, но мне неизвестно, был ли он ее истинным автором. Я не буду извиняться за то, что привел в этом сборнике такую старую задачу, поскольку, несомненно, многие мои читатели будут рады тому, что я посвящу их в тайну ее решения.

Она заключается в том, что нужно изобразить тремя ломаными линиями схему, которую держит в руках девочка на иллюстрации. Разумеется, при построении ломаной линии карандаш нельзя отрывать от бумаги, равно как и нельзя проводить одну линию дважды. Вы обнаружите, что бóльшую часть фигуры можно изобразить одной ломаной линией, но чтобы закончить ее, всегда будет требоваться четыре линии.

В другом варианте задачи эту фигуру нужно сначала нарисовать мелом на доске, а затем стереть тремя движениями.

2. Пятнадцать поворотов

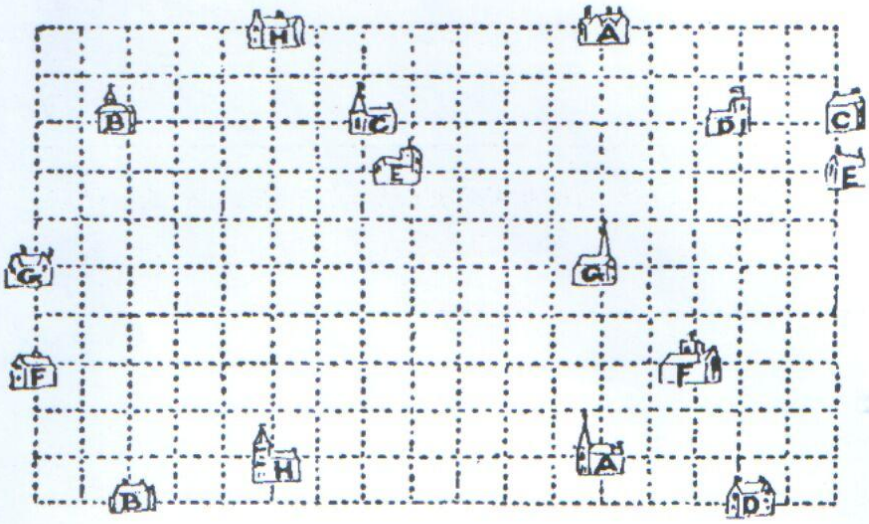
Это еще одна интересная задача обхода. Чтобы решить ее, вам потребуется немалая сообразительность. В этой задаче путешественник начинает путь в городе, обозначенном черной точкой, и хочет пройти как можно большее расстояние, совершив всего 15 поворотов и не проходя ни по какой дороге дважды.



Допустим, что города расположены в миле друг от друга. Если предположить, например, что путешественник пойдет по прямой в город A, затем по прямой в B, C, D, E и F, то он пройдет 37 миль, совершив 5 поворотов. Какое максимальное расстояние он может пройти, совершив 15 поворотов?

3. Задача для автомобилистов

Как-то утром восемь автомобилистов приехали в церковь на машинах. Их дома, церкви и единственно возможные пути (выделены пунктирной линией) изображены на рисунке на следующей странице. Первый автомобилист поехал из своего дома A в церковь A, второй — из дома B в церковь B, третий — из C в C и так далее. Оказалось, что ни один из водителей не пересек маршрут другого

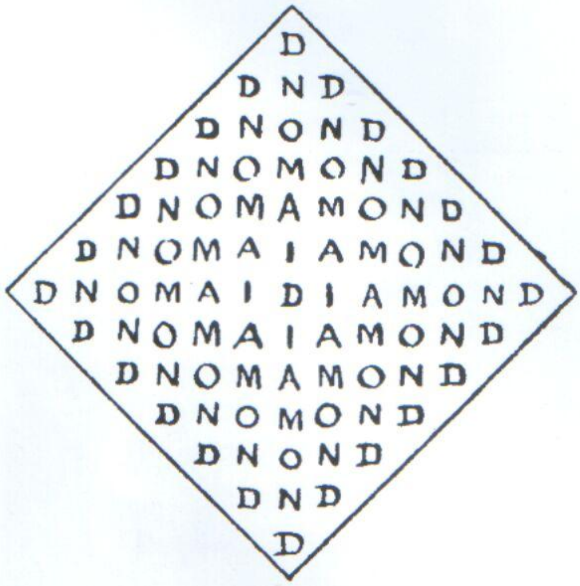


автомобиля. Возьмите в руки карандаш и нарисуйте, как ехали автомобилисты.

4. Задача о бриллианте

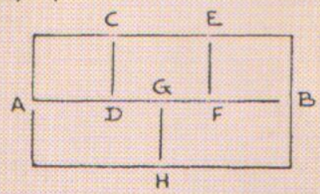
Сколькими способами можно прочитать слово DIAMOND («бриллиант») на рисунке справа?

Начать можно с любой буквы D, затем можно двигаться вверх, вниз, назад и вперед — в любом направлении между смежными буквами. Сколькими способами это можно сделать?



Решения

1. В обычных условиях задача не имеет решения. Доказать это нетрудно. Поэтому нужно найти подвох или хитрость в ее формулировке.

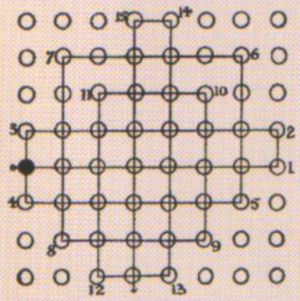


Если мы согнем лист бумаги гармошкой и проведем линию точно вдоль сгиба, то сможем провести сразу две линии фигуры — CD и EF. Затем нужно будет провести ломаную из точки A в точку B. Наконец, нужно будет добавить к рисунку линию GH, и все условия задачи будут выполнены, так как сгибать лист бумаги не запрещено. Разумеется, на рисунке линии не соединены, чтобы сделать построение более понятным.

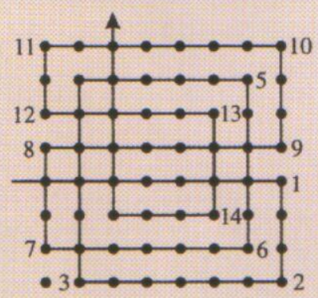
В варианте задачи, где нужно стереть фигуру, сначала нужно стереть линию, соединяющую точки A и B, одним движением. Затем нужно стереть линию GH одним пальцем. Наконец, нужно стереть оставшиеся две вертикальные линии двумя пальцами одновременно. Все условия задачи выполнены!

2. Как вы можете видеть на рисунке, где изображены только те дороги, по которым прошел путешественник, он может пройти 70 миль, совершив 15 поворотов.

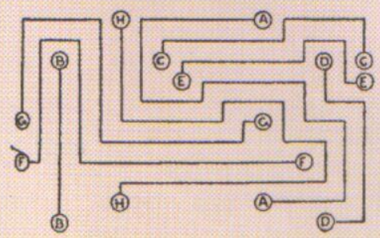
Повороты пронумерованы по порядку. Обратите внимание, что непосещенными остались 19 городов. Путешественник может посетить все города, совершив 15 поворотов, при этом не заходя ни в один город дважды и закончив путь в том же городе, из которого вышел (он отмечен черной точкой), однако в этом случае он пройдет лишь 64 мили, в то время как по условию задачи требуется пройти максимально возможное расстояние.



Примечание редактора. Виктор Милли обнаружил более оптимальное решение, чем Дьюдени, в котором путешественник пройдет 76 миль, при этом непосещенным останется всего 1 город. Это решение представлено на следующем рисунке. Является ли это решение наилучшим из всех возможных, неизвестно.



3. Маршруты, которыми ехали восемь автомобилистов, представлены на рисунке. Дороги, отмеченные пунктирными линиями, не показаны, чтобы сделать решение более понятным.



4. Общая формула такова: для слов из n букв, которые не являются палиндромами, при расположении букв подобным образом существует $(2n + 1) \times 4$ способов прочтения. В этом случае не допускается прочтение по диагонали, возможное, например, для слова DIGGING («раскопки»), где можно перейти от одной буквы G к другой по диагонали.

Лучшее от Эдуарда Люка

Подсчеты

Вороны, шимпанзе и счет

Часто говорят, что вороны умеют считать до пяти. Далее мы объясним происхождение этого утверждения. Прозорливый наблюдатель Лерой провел эксперимент, чтобы определить, насколько разумны животные. Заметив, что вороны не возвращаются в гнездо, если вблизи него находится человек, он поставил рядом с гнездом шалаш. Затем он попросил человека войти в шалаш и заметил, что вороны приближались к гнезду только после того, как человек выходил из шалаша. На следующий день Лерой попросил зайти в шалаш двух человек. Один из них покинул шалаш, второй остался внутри. Вороны вернулись в гнездо только после того, как второй человек также покинул шалаш. Затем он отправил в шалаш трех человек, и результат эксперимента был таким же: вороны не приближались к гнезду, пока из шалаша не вышли все люди. Когда в шалаше находилось пять человек, эксперимент завершился аналогично. Наконец, Лерой отправил в шалаш шесть человек, чтобы обмануть воронов. Этот пример доказывает, что птицы умеют считать до пяти.

М. Романес научил счету шимпанзе из Лондонского зоопарка. Он попросил его взять 1, 2, 3, 4 и 5 соломинок с кровати и принести ему. Он брал соломинки от шимпанзе только тогда, когда тот приносил нужное число соломинок. Спустя некоторое время шимпанзе прекрасно понимал, что от него требуется, и ошибался очень редко. Следовательно, нет никаких сомнений, что животное способно различать первые пять чисел и понимать, как называется каждое из них.

Если верить Монтеню, буйволы способны считать до ста.

«Для орошения царских садов в Сузах волы должны были вращать огромные колеса, к которым были прикреплены наполнявшиеся водой чаны наподобие тех, что часто встречаются в Лангедоке. В течение дня каждый вол должен был сделать до ста оборотов. Волы настолько привыкли к этому числу движений, что никакими силами нельзя было заставить их сделать лишний оборот: выполнив свою работу, они решительно останавливались» (Монтень. «Опыты». Книга II, глава XII).

Среди зулусов

Зулусы выражают число пять как «половина рук». О числе 6 они говорят «взять большой палец», а «один поверх руки другого» означает «двадцать один». Во всем мире арифметика начиналась со счета на пальцах рук и ног, отсюда и происходит обычай использовать числа 5, 10, 20 в качестве основания систем счисления. Так же поступаем и мы, поскольку используем число 5 в качестве основания при работе с римскими цифрами: V, VI, VII. Мы используем 10 как основание нашей десятичной системы, а французы применяют 20, когда говорят «quatre-vingt» (восемьдесят). Эти системы счисления используются во всем мире; тем не менее, они не столь удобны, как системы счисления по основанию 6, 12 и 24. Десятичная система столь широко применяется в математике благодаря нашим предкам: люди каменного века считали на пальцах, и эта традиция осталась неизменной и в наши дни.

В Бенгалии

Интересен метод счета бенгальцев, которые слывут лучшими в счете во всем мире. С помощью пальцев всего одной руки они могут считать до шестнадцати: на каждом пальце, кроме большого, учитываются три фаланги и кончик. При счете бенгальцы последовательно касаются каждой фаланги кончиком большого пальца руки, начиная с нижней фаланги мизинца. Они делают это столь быстро, что индус-служащий часто предпочитает механически сложить восемь и пять, начиная с фаланги, которая, как ему известно, обозначает восемь (это кончик безымянного пальца), и отсчитав от нее пять, то есть дойдя до основания указательного пальца, которое, как ему известно, обозначает тринадцать.

Если бы в самом начале бенгальцы поняли, что можно использовать только три фаланги, без кончика пальца, то каждая рука обозначала бы двенадцать, и во всем мире, возможно, использовалась бы двенадцатеричная система счисления.

Однако, по всей видимости, система счисления бенгальцев происходит от двоичной, которая была известна в Китае уже за 30 веков до нашей эры.

Рейка пекаря

Когда я был маленьким, то часто ходил за хлебом в пекарню возле нашего дома. Пекарь брал маленькую деревянную рейку, которую я приносил с собой, клал ее рядом со своей той же формы и размера и делал на обеих зарубку. Затем я уносил хлеб, а на моей рейке появлялась новая зарубка от пекаря. По прошествии двух недель или месяца зарубки превращались в прекрасные говорящие узоры, так как число зарубок обозначало число буханок хлеба, взятых в кредит, а сумма к оплате равнялась числу буханок, умноженному на стоимость одной буханки. Не смейтесь над этой маленькой историей, она вполне поучительна, так как напоминает, чему мы научились в детстве. Мы узнали, что число не зависит от формы, природы и того места, где находятся объекты. Мы поняли, что все числа можно получить, прибавляя последовательно единицу к самой себе, и что умножение — это результат сложения равных чисел. Именно об этом рассказывает нам история пекаря.

Ампер и фасоль

Первой способностью, которую проявил юный Андре Мари Ампер, стала способность к арифметике. Еще не зная чисел и не умея записывать их, он выполнял арифметические действия с большими величинами, используя небольшое число камешков или фасолин. Возможно, он следовал тем же путем, что и индийцы; возможно, он располагал камешки в линию подобно тому, как брахманы Пондишери, Калькутты и Варанаси выкладывают зерна в параллельные линии с удивительной быстротой и точностью. Чтобы показать, сколь велика была любовь юного Ампера к вычислениям, скажем, что как-то раз он, будучи разлучен с любимыми фасолинами по причине тяжелой болезни, заменил их кусочками бисквита, который ему разрешили съесть после трех дней строжайшей диеты. Закончим эту историю словами Араго: «Я далек от мысли, что этот случай можно считать неоспоримым свидетельством того, каким станет призвание Ампера в будущем. Я знаю, что есть дети, лень которых невозможно победить, а другим, напротив, все интересно и их все занимает, даже арифметические действия без определенной цели. Может ли кто-то возмутиться этим обстоятельством? Сочтет ли кто-либо преувеличением поместить действия с числами в один ряд с тем, что мы делаем лишь по необходимости, которая может компенсировать неудовольствие от них? Ответ на этот вопрос мне известен. Я процитирую не простого школьника, а известного мудреца, с которым я поделился своим изумлением, увидев, как посреди заседания академиков он перемножил два огромных ряда чисел, выбранные случайным образом. Он ответил: „Вы забыли об удовольствии, которое я почувствую, доказав правильность моих расчетов последующим делением“».

▲► *Ампер и Эйлер.*

Вычисления в уме

Развить у детей способности к вычислениям в уме и сделать так, чтобы подобные вычисления доставляли им удовольствие, порой несложно. Когда-то я был знаком с учителем, большинство учеников которого в возрасте от восьми до двенадцати лет знали таблицу умножения вплоть до умножения сто на сто и умели быстро вычислять в уме произведения четырехзначных чисел. Эта способность развивается у некоторых людей поистине удивительным образом; к таким людям относятся сицилийский священник Манджиамелли и священник из Туреня Анри Мондю: оба они выполняли умножение и деление, разбивая числа на группы по три цифры.

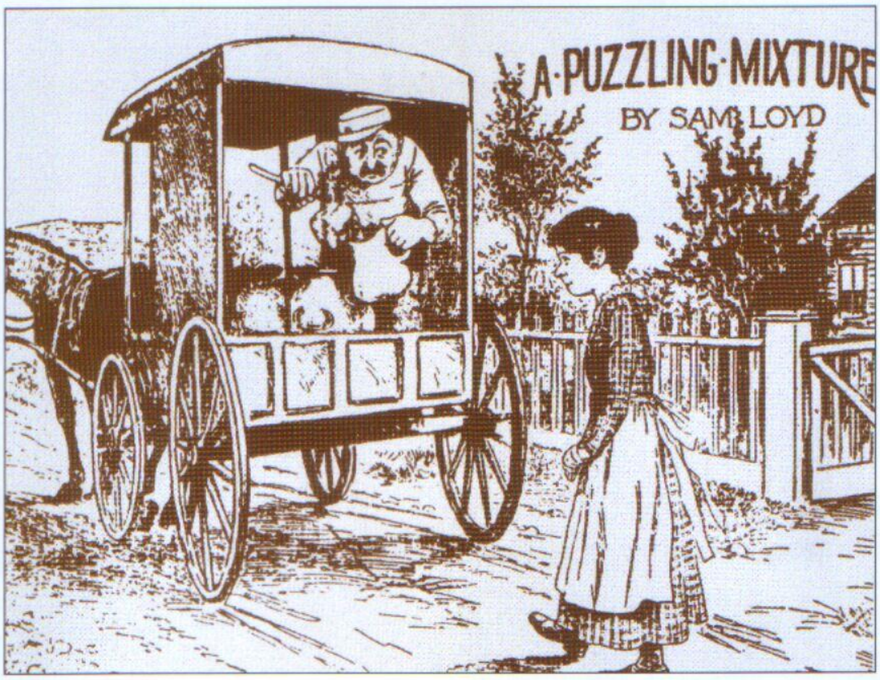
Способность к счету в уме нет необходимости развивать чрезмерно, однако, несомненно, будет полезно, если дети овладеют этим навыком в раннем возрасте. Сохранившись до зрелых лет, этот навык поможет при изучении всех наук. Великие математики никогда не относились к вычислениям в уме свысока: и Эйлер, и Валлис были не только выдающимися мудрецами, но и мастерами счета в уме. Без помощи карандаша и бумаги они могли решать сложнейшие арифметические и алгебраические задачи. Валлис обладал удивительной памятью: как-то вечером он вычислил в уме квадратный корень из 15-значного числа, а следующим утром верно продиктовал его. На выполнение аналогичных действий на доске или на листе бумаги мне потребовалось бы свыше часа, но и тогда я не до конца был бы уверен в правильности полученного ответа.

Вычисления возвращают из забытья

Закончим наш рассказ о счете в уме историей из биографии Гаспара Монжа, написанной Араго. Ланьи был известным членом старинной Академии наук. Он любил вычисления и нашел первые 154 знака числа, равного отношению длины окружности к ее диаметру. В конце жизни, будучи тяжело больным, он стал невосприимчив ко всему, в течение многих дней никому не удавалось заставить его проронить хотя бы слово. Однако один из его друзей прошептал ему на ухо: «Сколько будет 12 умножить на 12?», и тот немедленно ответил: «144». Так он вновь вернулся к жизни из забытья. В другой раз произошло совершенно обратное: когда была потеряна всякая надежда спасти Гаспара Монжа, основателя Политехнической школы, у его постели кто-то спел «Марсельезу». Тот остался равнодушен. Для столь ярого республиканца, как Монж, это было явным знаком близкой кончины.

Лучшее от Сэма Лойда

Молоко и вино



▲ *Сколько воды налил молочник в каждый из двух бидонов с молоком?*

1. Хитроумная смесь

Рассказывают, что один честный и простоватый молочник, который гордился своей работой и хвастался тем, что ни один покупатель не оставался недовольным, как-то утром к своему несчастью обнаружил, что его запасов молока не хватит для всех покупателей. И действительно, запасов было недостаточно для всех постоянных покупателей, и не было никакой возможности раздобыть еще молока.

Понимая, как сильно это может ударить по его репутации, не говоря уже о неудобствах для покупателей, он принялся ломать голову над тем, как же выйти из столь затруднительного положения.

Возвращаясь к задаче снова и снова, он решил, что справедливость не позволит ему доставить молоко одним покупателям и обойти вниманием других. Следовало разделить имеющееся молоко между всеми, при этом разбавить молоко водой так, чтобы его хватило всем.

Когда после долгих поисков он раздобыл немного чистой воды, то налил в один из бидонов столько галлонов воды, чтобы разбавленного молока хватило всем покупателям.

Тем не менее, так как он обычно продавал молоко двух сортов, один по восемь, а другой по десять центов за кварту, то он приготовил две смеси следующим хитроумным способом.

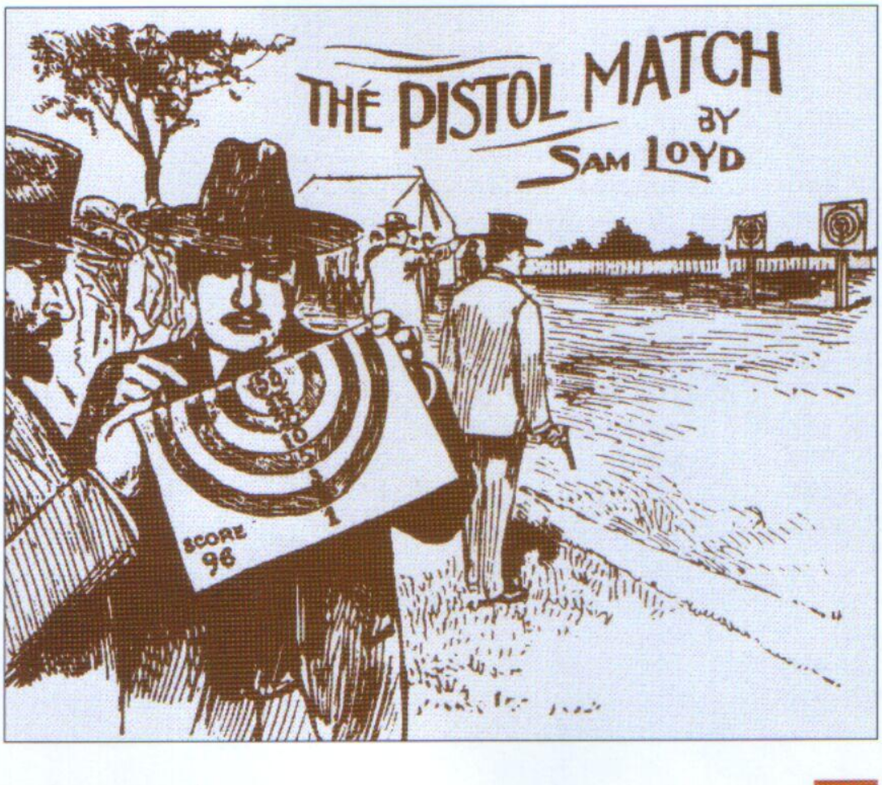
Из бидона № 1, в который была налита только вода, он отлил столько воды, чтобы удвоить объем содержимого бидона № 2, в котором было только молоко. Затем он перелил из бидона № 2 в бидон № 1 столько смеси, сколько воды оставалось в бидоне № 1. После этого, чтобы достичь желаемой пропорции, он перелил из бидона № 1 столько смеси, чтобы удвоить содержимое бидона № 2. При этом, как нетрудно доказать, объем смеси в каждом бидоне оказался одинаковым, однако в бидоне № 2 воды было на 2 галлона больше, чем молока.

Эта задача не так сложна, как может показаться, поскольку достаточно трех переливаний, чтобы объем содержимого в двух бидонах уравнялся. Сможете ли вы с точностью определить, сколько молока и воды оказалось в итоге в каждом бидоне?

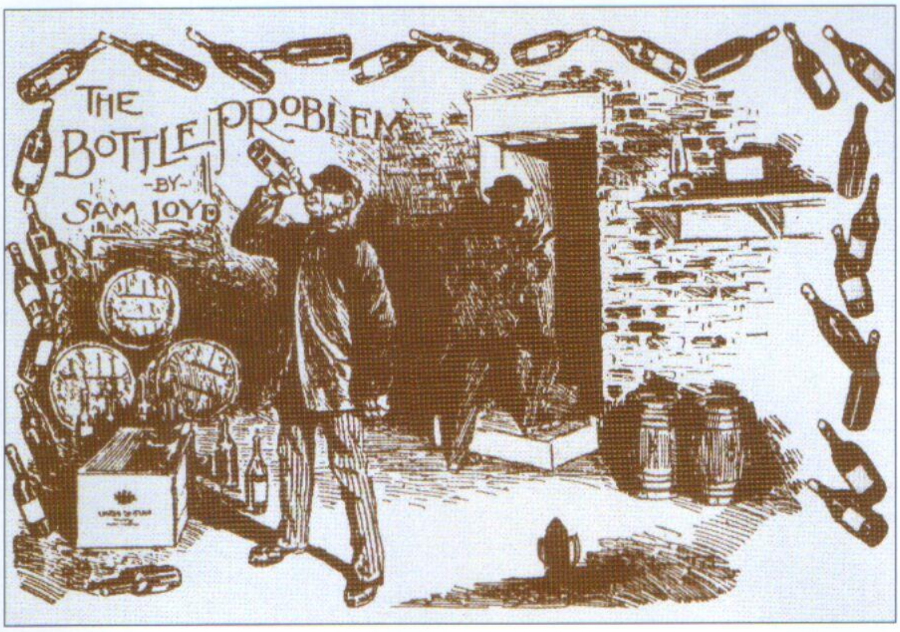
2. Состязание в стрельбе

Я опытный стрелок и участвовал во многих турнирах, поэтому меня крайне заинтересовало прошедшее недавно состязание в стрельбе, где американцы доказали свое превосходство над французами, пусть и с очень небольшим перевесом: 4 889 к 4 821. Этот турнир проводился одновременно по обе стороны океана, а результаты передавались по телеграфу, что сделало турнир интересным и увлекательным.

Меня позабавили комментарии неискушенных зрителей, заинтригованных особым языком стрелков. Участники турнира постоянно говорили, который час, и при этом всегда ошибались. Многие со всей серьезностью объясняли это разницей во времени между Нью-Йорком и Парижем.



▼ *Покажите, как можно набрать 96 очков с тремя дуплетами.*



▲ *Как ворам разделить поровну полные и пустые бутылки?*

«Как ты стрелял?» — спросил один знаток другого. «В половину шестого, но думаю, что попытаюсь в полпятого».

Чтобы объяснить, о чем идет речь, следует указать, что на больших стрельбищах нужно вносить поправку на ветер и расстояние. Поэтому все стрелки смотрели на мишени как на циферблаты часов, и если стрелок целился в центр, а пуля уходила «на пять часов», нужно было целиться «на одиннадцать часов», чтобы попасть точно в центр мишени.

Во время турнира возникло несколько проблем, которые, я уверен, заинтересуют читателей. Например, одна из задач показалась мне столь интересной, что она, вне сомнения, стоит тех усилий, что вам придется потратить на ее решение.

Один из стрелков выбил шестью выстрелами 96 очков, однако после тщательного осмотра мишени выяснилось, что в трех случаях пули дважды прошли через одно отверстие мишени.

На мишени, которую осматривают двое судей, отверстия в мишени обведены кругами. Сможете ли вы определить, как тремя дуплетами набрать итоговую сумму в 96 очков?

3. Задача о бутылках

Приведу небольшую задачу на вычитание и деление, которая показывает, как важна элементарная арифметика. Тем не менее, любители чисел могут попытаться решить эту головоломку, так как она требует скорее проницательности Шерлока Холмса, чем знаний математики.

Винный погреб одного джентльмена, по-видимому, был ограблен: пропало две дюжины бутылок с вином, которые воры унесли с собой. Им удалось бы сохранить награбленное, если бы они смогли разделить бутылки столь же умело, как и отнять.

Воры взяли дюжину бутылок в четверть литра и дюжину бутылок шампанского объемом в одну пинту, но сочли их слишком тяжелыми, чтобы унести с собой. Чтобы облегчить ношу, воры выпили пять бутылок объемом в четверть и пять — объемом в пинту, осушив их в честь кандидатов на предстоящих выборах в муниципалитет. Чтобы не оставлять следов, воры унесли бутылки с собой (кроме того, сами бутылки были весьма ценными). Тем не менее, прибыв в условленное место, они не смогли поровну разделить семь полных и пять пустых бутылок в одну четверть, равно как и семь полных и пять пустых бутылок объемом в одну пинту так, чтобы каждому досталось вина и бутылок на равную сумму. Возможно, разделить бутылки было бы намного проще, если бы воры не выпили так много вина.

Они были настолько глупы, что не хранили молчание, как следует поступать в таких случаях, а стали спорить и устроили перебранку. Это привлекло внимание двух полицейских, которые застали их с поличным и выпили все шампанское, заполучить которое им стоило стольких трудов. Однако это обстоятельство, равно как и то, что произошло с бутылками и как были наказаны воры на следующий день, не имеет никакого отношения к задаче.

Я закончу свой рассказ на этом, чтобы вы не подумали, будто я знаю об этом преступлении слишком много. Я прошу читателей указать, сколько было воров и как они могли поровну разделить между собой семь бутылок с вином и семь пустых бутылок объемом в одну четверть, а также семь бутылок с вином и семь пустых бутылок объемом в одну пинту. Разумеется, переливать вино из одной бутылки в другую нельзя. Любой опытный вор скажет вам, что с шампанским нельзя поступать подобным образом, поэтому использовать эту уловку в решении нельзя. (Примечание редактора: одна четверть равна двум пинтам.)

Решения

1. У честного молочника было 5 галлонов молока в бидоне № 2 и 11 галлонов воды в бидоне № 1. В результате описанных операций в первом бидоне окажется 6 галлонов воды и 2 галлона молока, во втором бидоне — 5 галлонов воды и 3 галлона молока.

2. Стрелок два раза выбил 25 очков, два раза — 20 и два раза — 3.

3. На рисунке к задаче о бутылках изображены всего два вора, однако не нужно быть Шерлоком Холмсом, чтобы определить, что воров на самом деле было трое. Им нужно было разделить 21 пинту вина (12 больших бутылок и 12 маленьких), и это число делится без остатка только на 3. Один из воров взял 3 полные бутылки и 1 пустую бутылку объемом в одну четверть, 1 полную и 3 пустых бутылки объемом в пинту. Остальные взяли по 2 полных и 2 пустых бутылки объемом в одну четверть и 3 полных и 1 пустую бутылку объемом в одну пинту. Таким образом, каждому досталось по 3,5 четверти вина, 4 больших и 4 маленьких бутылки.

Лучшее от Генри Э. Дьюдени

Задачи на группировку

▲ *Сможете ли вы разместить 15 овец в соответствии с условием?*

1. Пятнадцать овечек

В одной энциклопедии, как мне рассказывали, была представлена любопытная задача: «Разместите 15 овец в четырех загонах так, чтобы в каждом загоне число овец было одинаковым». К задаче не приводилось ответа, поэтому я решил найти его самостоятельно. Попытавшись решить задачу с помощью яблок и кирпичей, я счел, что решить ее невозможно: результат умножения любого числа на четыре будет четным числом, а 15 — нечетное число. Из этого я сделал вывод: овцы должны обладать неким особым и малоизвестным свойством, и решил опросить фермеров. Первый фермер указал, что если мы расположим один загон внутри другого, подобно кольцам мишени, и поместим всех овец в самый маленький загон, то решим задачу. Я возразил: в этом случае все овцы окажутся в одном загоне, а не в четырех. Второй фермер сказал, что если поместить по четыре овцы в три загона и три — в четвертый (всего 15 овец) и у одной из овец в последнем загоне ночью родится ягненок, то утром число овец в каждом загоне будет одинаковым. Этот ответ также не удовлетворил меня.

Третий фермер сказал:

— На одном моем поле стоит четыре загона. Там же пасется небольшое стадо барашков. Если вы пройдете со мной, то я покажу вам, как решить задачу.

На иллюстрации изображен фермер, готовый рассказать мне решение. После его объяснений мне стало совершенно понятно, что же имел в виду автор энциклопедии. Как же решить эту задачу? Сможете ли вы разместить 15 овец в соответствии с условием?

2. Колокольный звон

Один читатель в письме ко мне проявил большой интерес к колоколам и спросил меня, как получается «настоящий и правильный» колокольный звон. В своем письме он указал, что все возможные перестановки четырех колоколов должны прозвучать только один раз. Он также добавил, что ни один колокол нельзя перемещать с места на место больше одного раза, ни один колокол не может звучать первым или последним больше двух раз подряд. Кроме того, колокола должны располагаться так, чтобы от последнего расположения колоколов можно было перейти к первому при соблюдении всех остальных правил задачи.

Ниже показано, как выполнить все эти невероятные условия для трех колоколов.

1	2	3
2	1	3
2	3	1
3	2	1
3	1	2
1	3	2

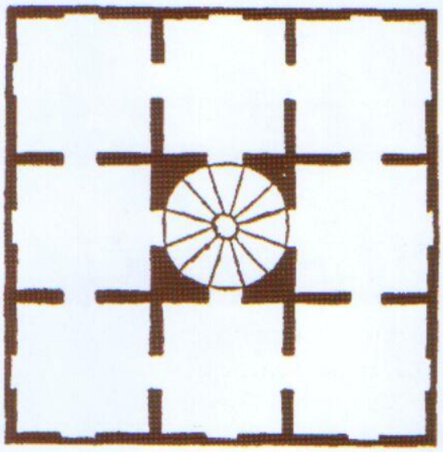
Каким будет решение этой задачи для четырех колоколов?

3. Построение тетраэдра

У меня есть тетраэдр, или треугольная пирамида, составленная из шести спиц, как показано на рисунке. Сможете ли вы верно указать, сколькими способами можно соединить эти спицы так, чтобы получилась пирамида? Несколько моих друзей попытались решить эту задачу на одной из встреч. В качестве модели они использовали спички, но в итоге все они получили разные ответы. Как вы увидите, если мы уберем одну спицу и повернем ее так, чтобы один из ее концов занял место, которое раньше занимал другой, то получится новая пирамида. Если мы поменяем две спицы местами, также получится новая пирамида. Но помните, что каждая пирамида может опираться на любую из четырех граней и при этом она будет считаться неизменной. Сколькими способами можно построить пирамиду?

4. Задача о спальнях

В обители находится восемь больших спален на одном этаже, куда можно попасть по винтовой лестнице, расположенной в центре, как показано на схеме. Как-то в понедельник во время осмотра настоятель заметил, что южная сторона настолько полюбилась монахам, что на ней спало в шесть раз больше монахов, чем на каждой из оставшихся трех сторон. Он обратил внимание на эту разницу и попросил устранить ее. Во вторник настоятель обнаружил, что на южной стороне спало в пять раз больше монахов, чем на каждой из оставшихся трех. Он обратился с жалобой еще раз. В среду на южной стороне спало в четыре раза больше монахов, чем на остальных, в четверг — в три раза больше, в пятницу — в два раза. Вновь обратившись к монахам с просьбой, в субботу настоятель остался доволен: на каждой из четырех сторон спало одинаковое число монахов. Каково наименьшее число монахов в обители и как можно расположить их во все шесть ночей согласно условию задачи? Ни одна из комнат при этом не должна оказаться пустой.



Решения

1. Если мы внимательно прочитаем отрывок из энциклопедии, то увидим, что в нем не говорится, что все загоны изначально были пусты. Если читатель посмотрит на иллюстрацию, то увидит, что в одном из загонов уже стоит одна овца. Именно в этот момент смекалистый фермер сказал: «А теперь я пущу в загоны пятнадцать овец». Затем он перегнал трех овец в тот загон, где уже стояла одна овца, после чего загнал по четыре овцы в каждый из трех остальных загонов. «Вот и все, — сказал он. — Вы увидели, как я распределил пятнадцать овец по четырем загонам так, что число овец в каждом загоне оказалось одинаковым». Разумеется, мне пришлось признать его правоту, так как он совершенно верно решил поставленную задачу.

2. Колокола должны прозвонить в таком порядке:

1234	3142	4213	3421
2143	1324	2431	4312
2413	3124	2341	4132
4231	1342	3214	1423
4321	1432	2314	1243
3412	4123	3241	2134

Я также нашел решение этой задачи для пяти и шести колоколов. При заданных условиях эта задачу можно решить для любого числа колоколов.

3. Возьмите пирамиду и поставьте ее так, чтобы на стол опиралась всего одна спица. Теперь из точки опоры в разные стороны должны расходиться четыре спицы. Эти четыре спицы можно выбрать пятью разными способами, так как в точку опоры, где они будут соединяться, может не входить любая из пяти спиц. Однако четыре выбранные спицы можно расположить 24 разными способами. После того как мы выбрали спицы и определили их расположение, каждую из них можно будет перевернуть относительно остальных. Таким образом, получим еще 16 способов. Для любого расположения спиц шестую спицу можно разместить двумя разными способами. Перемножим эти результаты и получим $5 \times 24 \times 16 \times 2 = 3840$ — это и будет точное число способов, которыми можно построить пирамиду. Этот метод исключает малейшую вероятность ошибки. Далее я приведу основную причину ошибок, возникающих при решении этой задачи. Если вы подсчитаете число сочетаний, рассмотрев верхнюю вершину пирамиды и треугольную грань, которой она опирается на стол, то получите лишь половину от общего числа способов, так как вы не учтете, что столько же пирамид можно построить на основе нижней треугольной грани, которой пирамида опирается на стол. В действительности пирамиды из этих двух групп будут зеркальными отражениями друг друга, следовательно, они не будут совпадать между собой (разве что в четырехмерном пространстве).

4. Монахов следует разместить так, как показано на схемах. Минимальное число монахов равно 32, а их расположение в три последних дня может отличаться от того, что представлено далее.

1	2	1
2		2
1	22	1

Понедельник

1	3	1
1		1
3	19	3

Вторник

1	4	1
1		1
4	16	4

Среда

1	5	1
2		2
4	13	4

Четверг

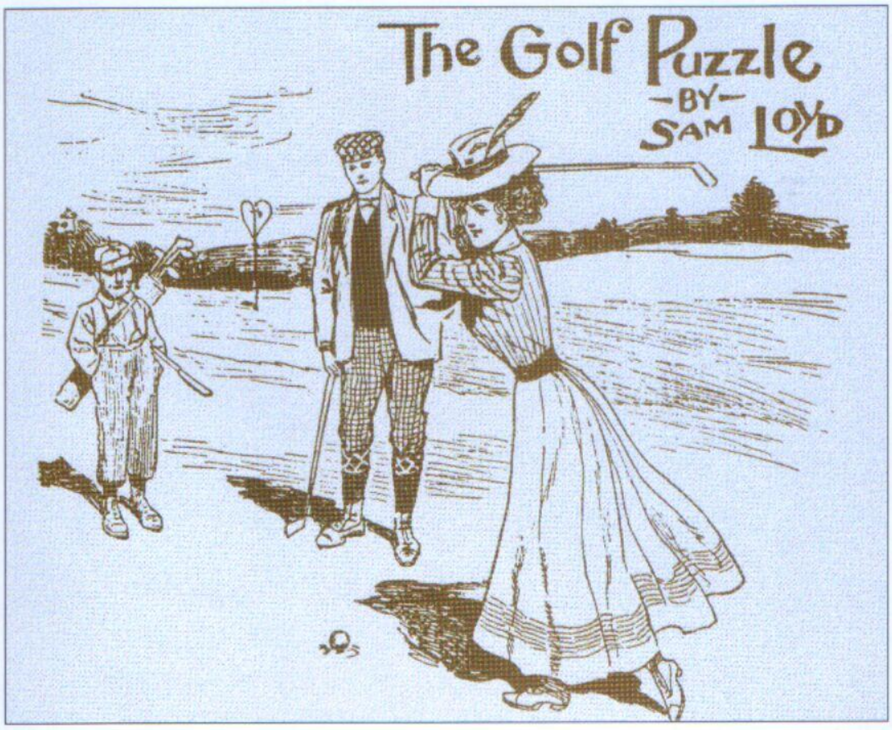
2	6	2
1		1
7	6	7

Пятница

4	4	4
4		4
4	4	4

Суббота

Гольф, дедушка и враждующие соседи



▲ *Какими двумя ударами можно пройти все поле, набрав наименьшее число очков?*

1. Задача об игре в гольф

Сегодня весь мир играет в гольф, и даже лентяи, которые несколько недель назад заявляли, что находят куда больше удовольствия в том, чтобы полежать в гамаке в тени, подхватили вирус гольфа и вместе с остальными гоняют мяч от лунки к лунке. Я не великий гольфист, но я знаком с гением, который разработал математическую систему, позволяющую выигрывать всегда. Он говорил: «Нужно отработать всего два удара на разное расстояние: один основной, другой выводящий. Нужно всегда целиться в направлении лунки, и сочетание этих двух ударов неизменно позволит нам забить мяч в лунку».

На какое расстояние нужно послать мяч каждым из этих ударов, чтобы набрать минимально возможное число очков на поле для гольфа из девяти лунок, расстояние до которых равно 150, 300, 250, 325, 275, 350, 225, 400 и 425 ярдам? При каждом основном и каждом выводящем ударе расстояние, которое пролетает мяч, неизменно. Любым из этих двух ударов можно отправить мяч дальше лунки, после чего нанести следующий удар в обратную сторону. Все удары наносятся по прямой линии, направленной в сторону лунки.

2. Дедушкина задача

Это одна из тех старинных задач, что передаются из поколения в поколение, и никто не осмеливается усомниться в правильности ответов на них. Тем не менее не так давно некий увлеченный бостонский юноша получил эту реликвию от дедушки и привел столь неожиданное решение, что пожилой джентльмен лишился дара речи.

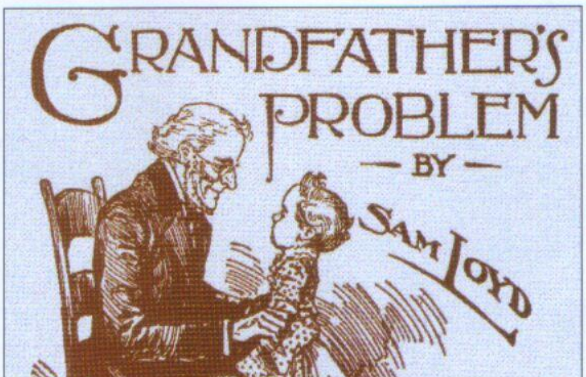
Многих людей очень часто просят определить разность в весе между шестью дюжинами дюжин фунтов свинца и половиной дюжины дюжин фунтов золота, и все отвечают без промедления. «Фунт везде одинаковый» — говорят они. «Шесть дюжин дюжин будет 864, а половина дюжины дюжин — 72, поэтому разность будет равна 792 фунтам».

Тем не менее, если рассмотреть формулировку вопроса очень внимательно и достаточно подробно, то можно увидеть, что в действительности на этот вопрос никто не дал правильного ответа с 1614 года, когда он был впервые озвучен.

3. Ошибочные веса

Монеты Востока имеют разную форму и вес, чтобы торговцы могли обманывать путешественников. Восточная денежная система слишком сложна для наших математиков, поэтому для простоты мы будем использовать в описании привычные доллары и центы.

Верблюжью шерсть, которая используется для изготовления шалей и дорогих ковров, собирают простолюдины, а затем посредники продают ее торговцам в больших или малых количествах. Чтобы гарантировать беспристрастность, посредник никогда не покупает шерсть для себя; напротив, получив указание купить шерсть, он ищет того, кто продаст ее, и забирает себе два процента комиссионных. Тем не менее он настраивает весы так, чтобы обмануть покупателей и продавцов

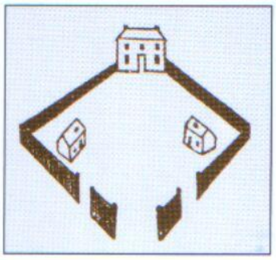


► *Какова разница в весе между шестью дюжинами дюжин фунтов свинца и половиной дюжины дюжин фунтов золота?*

в свою пользу, особенно если клиент недостаточно опытен и верит посреднику на слово.

Я воспользуюсь случаем и расскажу читателям о прекрасной задаче, показывающей, насколько просты приемы, которыми пользуются посредники. Получив верблюжью шерсть, посредник положил ее на короткий рычаг весов, чтобы прибавить к каждому фунту одну унцию, а при продаже поменял чаши весов местами, чтобы вес шерсти «уменьшился» на одну унцию на каждый фунт. За счет этих манипуляций посредник выручил 25 долларов. (Напоминаем, что в одном фунте 16 унций).

Может показаться, что эта задача очень проста (и это в самом деле так) и приведенных данных достаточно для ее решения. Тем не менее только умелый счетовод сможет верно ответить на следующий вопрос: сколько заплатил посредник за товар?



4. Враждующие соседи

Эта редкая и простая задача, одна из первых моих задач, впервые была опубликована больше полувека назад. Слева воспроизведен рисунок, который я нарисовал, когда мне было девять лет.

Говорят, что трое соседей, которым принадлежит небольшой парк, изображенный на рисунке, повздорили. Владелец большого дома пожаловался, что его беспокоят соседские куры, и отгородил тропинку от своей двери к выходу, изображенному в нижней части рисунка. Затем хозяин дома справа огородил дорожку к выходу, расположенному слева, а сосед слева проложил дорожку к выходу справа.

Никакие две дорожки не пересекаются. Сможете нарисовать, как соседи проложили дорожки по двору?

Решения

1. Поле для гольфа можно пройти за 26 ударов, если при основном ударе мяч будет улетать на 150 ярдов, а при выводящем — на 125 ярдов. Удары нужно наносить в следующей последовательности:

150 ярдов: 1 основной удар.
300 ярдов: 2 основных удара.
250 ярдов: 2 выводящих удара.
325 ярдов: 3 основных удара и 1 выводящий в обратную сторону.
275 ярдов: 1 основной удар и 1 выводящий.
350 ярдов: 4 выводящих удара и 1 основной в обратную сторону.
225 ярдов: 3 выводящих удара и 1 основной в обратную сторону.
400 ярдов: 1 основной и 2 выводящих удара.
425 ярдов: 2 основных и 1 выводящий удар.

2. Чтобы решить эту старую задачу, нужно учесть, что золото взвешивают в тройской системе, в которой фунт равен 12 унциям, а свинец — в системе эвердьюпойс (в ней фунт равен 16 унциям). Здесь фраза «фунт везде одинаковый» неверна.

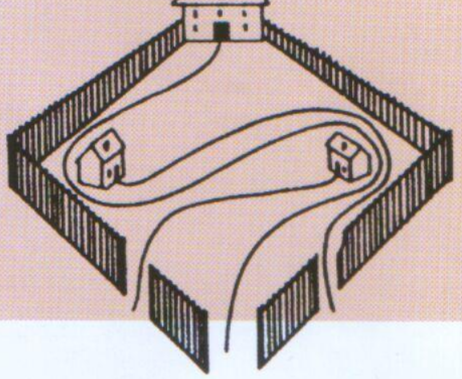
Шесть дюжин дюжин фунтов свинца весят 864 фунта в системе эвердьюпойс, а 72 тройских фунта золота в этой системе будут весить всего 59 фунтов, 3 унции и 407,5 гранов. Так как 864 фунта можно представить как 863 фунта, 15 унций и 437,5 гранов, то если мы вычтем из этой величины 59 фунтов, 3 унции и 407,5 гранов, получим 804 фунта, 12 унций и 30 гранов. Именно таким будет ответ, выраженный в системе эвердьюпойс.

Как правило, люди не знают о том, что используются две разные системы весов. Некоторые считают, что фунт одинаков в обеих системах и в одной он делится на 16 унций, в другой — на 12. Тем не менее большинство уверены, что равными в обеих системах принимаются унции и фунт в системе эвердьюпойс равен 16 унциям, тройский фунт — 12 унциям. Оба этих утверждения неверны. Соотношение между системами строится на том, что фунт в системе эвердьюпойс равен 7000 гранов, а тройская унция составляет всего 5760 гранов.

3. Если посредник при взвешивании прибавил к каждому фунту одну унцию, то в «его» фунте было 17 унций. Когда он продавал шерсть, убавив по унции с каждого фунта, в «его» фунте было 15 унций. Таким образом, его выгода составила две унции с фунта. Если эти две унции были проданы по одной и той же цене и посредник получил выгоду в 25 долларов, то очевидно, что эти две унции составляют 2/15 от суммы, заплаченной при покупке и полученной при продаже 15 унций. Если 1/15 равна 12,5 доллара, то 15/15 будут равны 187,5 доллара. Если бы посредник не брал комиссионные за свои услуги, то именно столько он заплатил бы за товар.

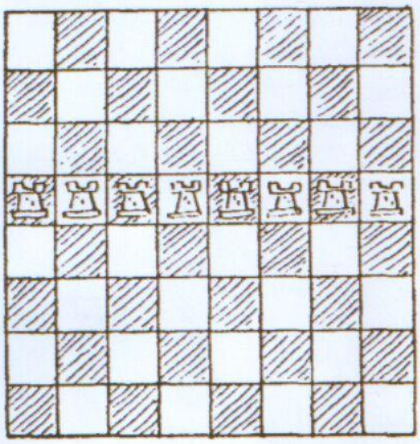
Тем не менее за свои услуги он получил 2% от продавца, то есть 3,75 доллара, и 4,25 доллара от покупателя, что добавляет 8 долларов к тем 25 долларам, что он выгадал на этой сделке. Если бы посредник был честным, он заплатил бы за 17 унций в точности 199,21875 доллара. Его комиссионные при покупке и продаже составили бы 7,96875 доллара; таким образом, обманув продавца и покупателя, он заработал дополнительные 3 и 1/8 цента. Так как в задаче сказано, что он выручил на сделке ровно 25 долларов, нужно уменьшить сумму в 187,5 доллара так, чтобы выгода от покупки и продажи в сумме составила ровно 25 долларов. Так как 3 и 1/8 цента в точности равны 1/801 от 25,03125 доллара, нужно вычесть из 187,5 доллара 1/801 часть. Получим 187,27 доллара. Таким образом, посредник получит 25 долларов и 0,0006 цента. Если вы хотите узнать ответ с абсолютной точностью, скажу, что продавец заплатил посреднику 187,2659176029973125 доллара без комиссии в 2%, которая составила 3,745 доллара.

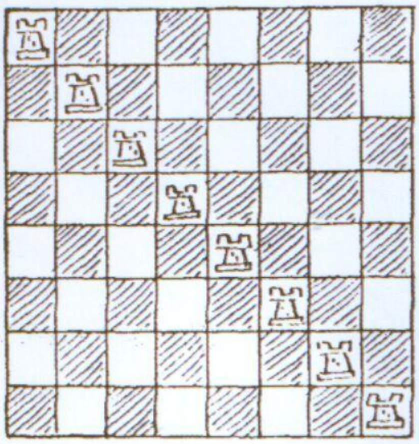
4. Враждующие соседи проложили дорожки так:



Лучшее от Генри Э. Дьюдени

Задачи на шахматной доске





▲ *Сколькими способами можно расположить восемь ладей на доске так, чтобы каждая клетка была либо занята, либо находилась под боем и чтобы ни одна ладья не была защищена?*

1. Задача о восьми ладьях

На рисунке слева вы можете видеть, что каждая клетка шахматной доски либо занята ладьей, либо находится под боем, а каждая ладья защищена другой ладьей (если бы на доске в том же порядке располагались белые и черные ладьи, мы сказали бы, что все они находятся под боем). Если расположить восемь ладей в любом столбце или любой строке, эффект будет аналогичным. На рисунке справа каждая клетка либо занята, либо находится под боем, но в этом случае ни одна ладья не защищена.

Сколькими способами можно расположить восемь ладей на доске так, чтобы каждая клетка была либо занята, либо находилась под боем и чтобы ни одна ладья не была защищена? Здесь я не хочу рассматривать проблему зеркальной симметрии, поэтому расположение ладей на разных диагоналях доски считается различным. Аналогично и для других расположений, полученных поворотом доски.

2. Незащищенные слоны

Расположите минимально возможное число слонов на шахматной доске так, чтобы каждая клетка оказалась занята или находилась под боем. Вы увидите, что зона поражения ладьи больше, чем зона поражения слона. В какой бы клетке доски вы ни расположили ладью, под боем всегда будут находиться 14 клеток, в то время как под боем слона будут находиться 7, 9, 11 или 13 клеток в зависимости от того, на какой диагонали он расположен. Следует указать, что когда мы говорим о диагоналях шахматной доски, мы не ограничиваемся двумя большими диагоналями, идущими из угла в угол доски, а учитываем все малые диагонали, параллельные им. Рекомендуем читателю обратить внимание на этот момент, чтобы избежать недопонимания в следующих задачах.

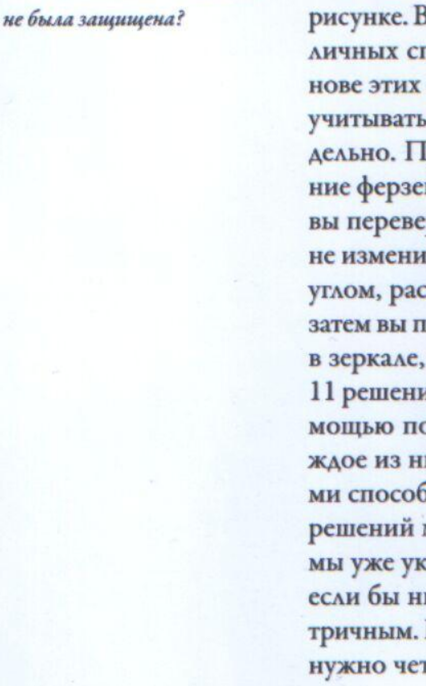
3. Защищенные слоны

Сколько слонов необходимо для того, чтобы каждая клетка доски была либо занята, либо находилась под боем, а каждый слон при этом был бы защищен другим слоном? Как расположить слонов, чтобы выполнить все условия задачи?

4. Восемь ферзей

Ферзь, несомненно, самая сильная шахматная фигура. Если расположить ферзя в одной из четырех центральных клеток доски, под боем окажутся 27 других клеток. Если расположить ферзя в углу доски, под боем окажется 21 клетка. Восемь ферзей можно расположить на доске так, что ни один не будет под боем другого. В старой задаче, впервые предложенной Ноком в 1850 году, которая подробно освещена в литературе, требуется указать, сколькими способами можно расположить восемь ферзей согласно этому условию.

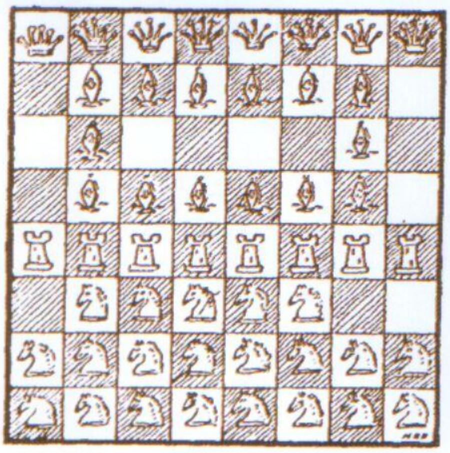
Один из возможных способов представлен на рисунке. Всего существует 12 принципиально различных способов расположения ферзей. На основе этих способов можно получить еще 92, если учитывать повороты и зеркальную симметрию отдельно. Представленное на рисунке расположение ферзей в некотором роде симметрично. Если вы перевернете страницу вверх ногами, рисунок не изменится, но если вы посмотрите на него под углом, расположение ферзей будет другим. Если затем вы посмотрите на оба расположения ферзей в зеркале, то увидите еще два новых. Остальные 11 решений несимметричны, следовательно, с помощью поворотов и зеркальной симметрии каждое из них можно представить восемью разными способами. По этой причине из 12 основных решений можно получить всего 92 решения, как мы уже указывали, а не 96, как было бы в случае, если бы ни одно из 12 исходных не было симметричным. При решении задач на шахматной доске нужно четко представлять себе повороты и зеркальную симметрию доски.



Сможет ли читатель расположить восемь ферзей на шахматной доске так, чтобы ни один из них не находился под боем другого и при этом никакие три ферзя не располагались бы на одной линии? Расположение ферзей, представленное на рисунке, не удовлетворяет условию задачи, так как на линиях, отмеченных точками, находится по три ферзя. Условию задачи удовлетворяет всего одно из 12 базовых решений. Сможете найти его?

5. Перенаселенная шахматная доска

В этой задаче нужно расставить на доске 51 шахматную фигуру так, чтобы ни один ферзь не находился под боем другого, ни одна ладья не находилась под боем другой, ни один слон не находился под боем другого и ни один конь не находился под боем другого. Расположение других



фигур не учитывается: считается, что два ферзя находятся под боем друг друга, даже если между ними расположены, например, ладья, слон и конь. Аналогично для слонов и ладей.

Найти решения для каждой фигуры по отдельности несложно. Трудности возникнут, когда вы попробуете найти место на доске для всех фигур одновременно.

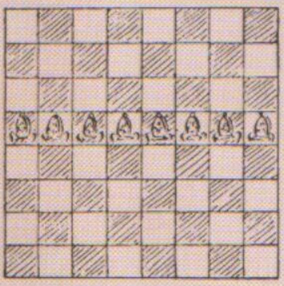
Решения

1. Очевидно, что в каждой строке и в каждом столбце должна находиться одна ладья. Начнем с верхней строки. Очевидно, что первую ладью можно поместить в любую из восьми клеток. Куда бы мы ни поместили первую ладью, вторую можно расположить в любой из семи клеток второй строки. Третью ладью можно расположить в любой из шести клеток третьей строки, четвертую — в любой из пяти клеток четвертой и так далее. Следовательно, общее число вариантов должно равняться $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \times 2 \times 1 = 40\,320$ (то есть 8 факториал, 8!). Это и есть правильный ответ.

Определить число решений без учета отражений и поворотов до сих пор никому не удалось: эта задача крайне сложна. Этот вопрос для шахматных досок меньшего размера мы рассмотрим в следующей задаче.

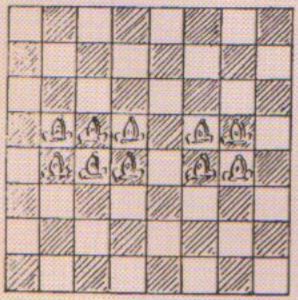
(Эту задачу в 1962 году одновременно и без помощи компьютера решили Дэвид Смит и Дональд Чарнли. Для доски размером 8×8 существует 5282 решения, для доски 9×9 — 46 066 решений. Для досок размерами от 2×2 до 7×7 существует 1, 2, 7, 23, 115 и 694 решения соответственно.)

2. Для решения этой задачи нужно как минимум восемь слонов. Самым простым решением будет расположить их в линию вдоль четвертой или пятой строки доски.



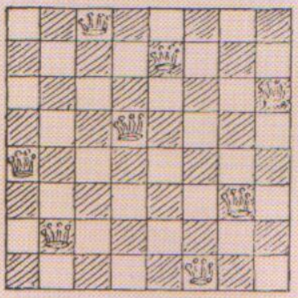
Однако читатель обратит внимание, что при таком расположении ни один слон не находится под защитой другого. Этот вопрос мы рассмотрим при объяснении решения следующей задачи.

3. Решить эту задачу очень просто, если сперва немного поразмыслить. Нужно рассмотреть только черные клетки доски. Любое расположение, верное для белых клеток, можно повторить и для черных, так как они взаимозаменяемы. Это возможно благодаря тому, что на шахматной доске четное число клеток — шестьдесят четыре. Если квадратная доска содержит нечетное число клеток, то на ней всегда будет на одну клетку одного цвета больше, чем другого.

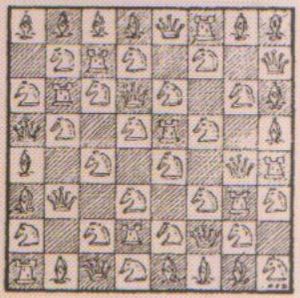


Чтобы каждая клетка находилась под боем и каждый слон был защищен другим, потребуется 10 слонов. Один из вариантов решения представлен на рисунке. Обратите внимание, что два центральных слона в группе из шести слонов в левой части доски не играют никакой роли, они только защищают слонов в соседних клетках. Чтобы получить еще одно решение, передвиньте одного из двух упомянутых слонов на одну клетку вверх, другого — на одну клетку вниз.

4. Решение этой задачи представлено на рисунке. Как видите, ни один ферзь не находится под боем другого и никакие три ферзя не расположены на одной линии. Это единственное из 12 базовых расположений из восьми ферзей, не находящихся под боем друг друга, которое удовлетворяет последнему условию задачи.

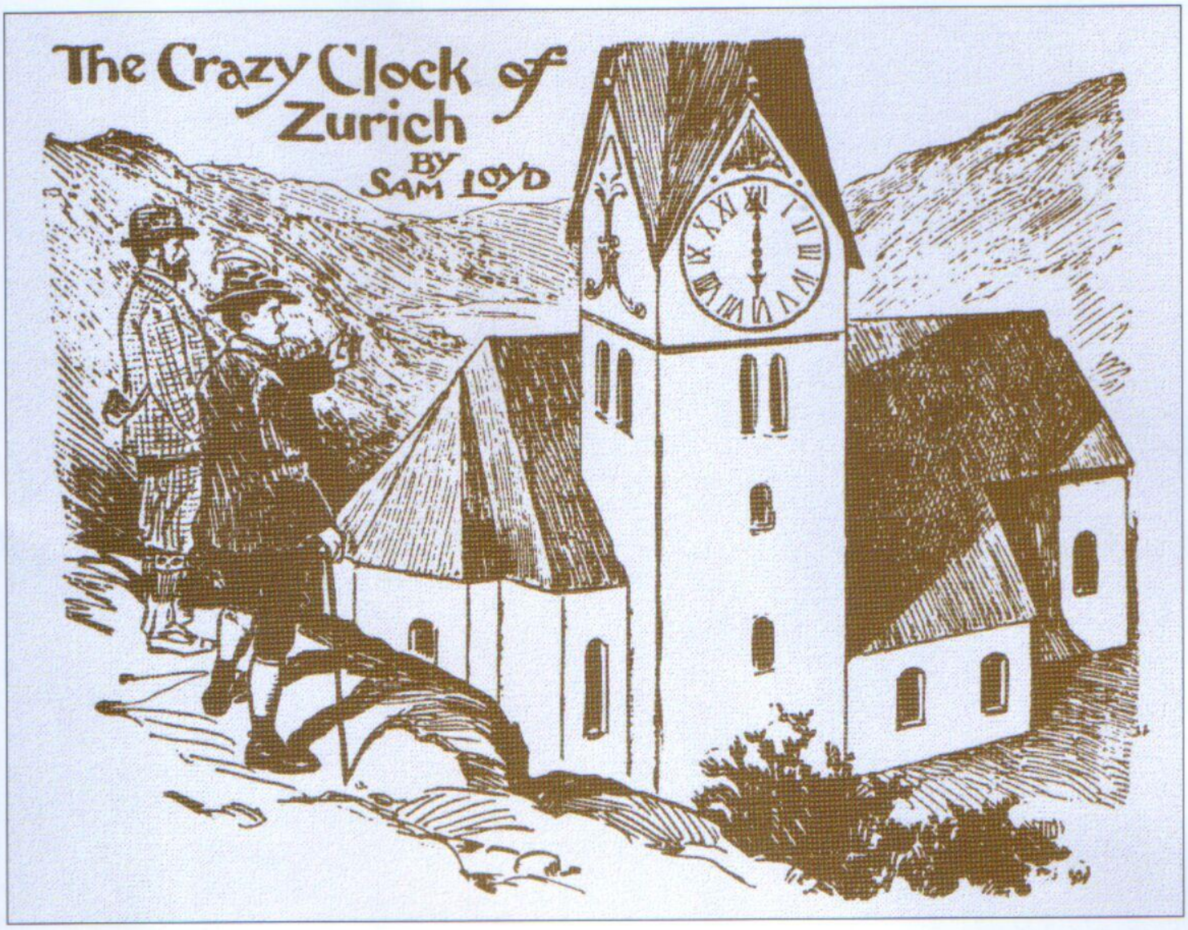


5. Решение представлено на рисунке. На доске можно расположить не более восьми ферзей и восьми ладей так, чтобы они не находились под боем друг друга. Максимально возможное число слонов равно 14, коней — 32. Так как всех коней нужно поместить в клетки одного цвета, ферзи занимают по четыре клетки каждого цвета, а слоны — по семь, можно сделать вывод: расположить на доске согласно условиям задачи можно всего 21 коня.



Если решать эту задачу только для коней, то на клетках обоих цветов можно расположить больше чем 21 коня, однако на «перенаселенной» доске мне так и не удалось превзойти это число. Я считаю, что представленное мной решение содержит максимально возможное число фигур, но, возможно, какому-нибудь проницательному читателю удастся расположить на доске еще одного коня.

Часы и стенография



◄ *Когда часы снова покажут точное время?*

1. Сумасбродные цюрихские часы

Швейцарские туристы сразу же узнают изображенную на иллюстрации заброшенную церковь в окрестностях Цюриха и вспомнят жуткую историю ее заколдованных часов. Оставим в стороне всю мистику и тайны этой истории, которую туристы пересказывают во множестве версий, и упомянем лишь, что церковь была построена в середине XV столетия. Старейший житель тех мест, человек по имени Йоргенсен, основатель часовой фабрики (в его честь и был назван городок), пожертвовал церкви башенные часы. Часы были запущены в шесть утра на торжественной церемонии. По ним швейцарцы отмечали все, даже самые незначительные события. К несчастью, стрелки часов были установлены неверно. Минутная стрелка двигалась в 12 раз медленнее часовой, поэтому жители городка в шутку заметили, что часовая стрелка «двигалась с достоинством».

После того как люди объяснили причуды заколдованных часов старому и больному часовщику, тот захотел взглянуть на часы сам. Когда он пришел к церкви, по удивительному совпадению часы показывали точное время. Это настолько поразило старика, что тот умер от радости. Тем не менее капризы часов продолжались, и жители деревни стали считать их заколдованными. Никто не осмеливался починить их, и постепенно часовой механизм заржавел. В память об этих часах осталась только любопытная задача, которую я предлагаю вам.

Если часы завели в шесть часов, как показано на иллюстрации, и часовая стрелка двигалась в 12 раз быстрее минутной, то в какое время часовая и минутная стрелка в первый раз показали точное время?

2. Зарплата стенографистки

Эта задача, посвященная одному эпизоду из повседневной жизни, будет интересна всякому, кто захочет решить ее. Как-то раз шеф, будучи в хорошем расположении духа, сказал стенографистке:

«Мари, я вижу, что ты никогда не просишь у меня лишний отпуск, и я решил повысить тебе зарплату на 100 долларов в год. Начиная с сегодняшнего дня, в течение следующего года я буду доплачивать тебе прибавку еженедельно, исходя из расчета 600 долларов в год, по прошествии этого года — из расчета 700 долларов в год, затем — 800 и так далее. Каждый год ты будешь получать прибавку в 100 долларов».

«У меня слабое сердце, — ответила обрадованная юная девушка, — поэтому мне бы хотелось, чтобы повышение было не столь резким. Пусть, как вы сказали, с сегодняшнего дня мое жалованье составляет 600 долларов в год, но по прошествии шести месяцев вы повысите его на 25 долларов в год, а затем будете повышать его на 25 долларов в год каждые шесть месяцев, если, конечно, вы будете довольны моей работой».

Шеф улыбнулся и согласился с предложением стенографистки, однако блеск в ее глазах заставил некоторых юношей в конторе усомниться, правильно ли поступил шеф, приняв предложенные условия. Сможете ли вы ответить на этот вопрос?

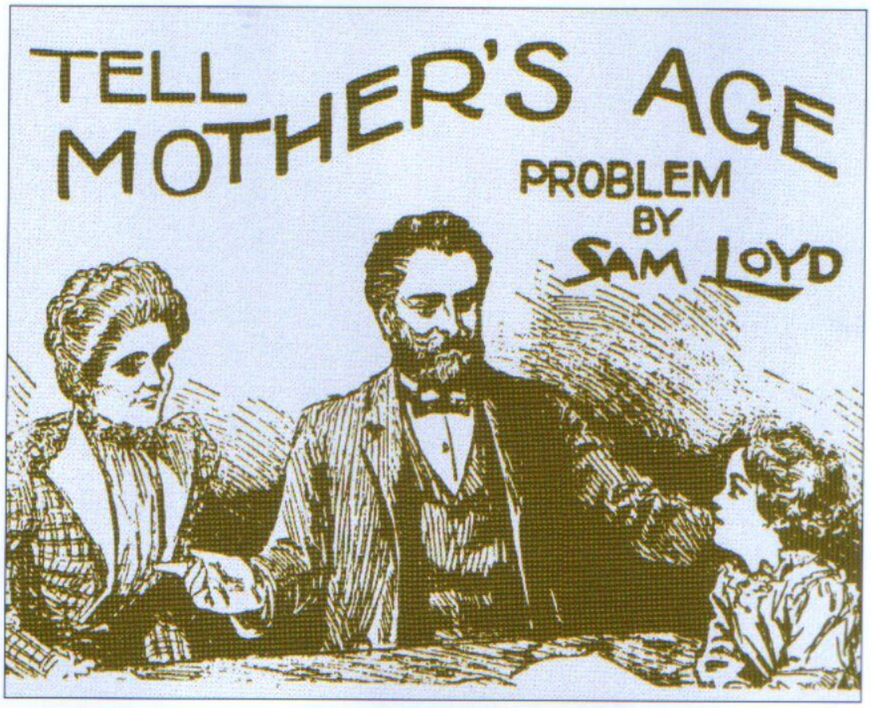
3. Угадайте возраст матери

Головоломки о возрасте весьма интересны, и молодые люди, интересующиеся математикой, всегда уделяют им внимание. Как правило, подобные задачи крайне просты, однако в этой задаче исходных данных так мало, а ее формулировка настолько оригинальна, что она наверняка покажется вам неожиданной.

Один из членов семейства, изображенного на рисунке, отмечал день рождения. Юный Томми заинтересовался, сколько лет его родителям, и отец ответил на его вопросы так: «Томми, нам троим в сумме 70 лет. Так как я в шесть раз старше, чем ты сейчас, то можно сказать, что когда я буду в два раза старше тебя, то сумма наших возрастов будет в два раза больше, чем сейчас. Посмотрим, сможешь ли ты сказать, сколько лет твоей матери».

Томми, который блестяще обращался с числами, быстро решил задачу, но у него было одно преимущество: он знал свой возраст и мог довольно точно угадать возраст своих родителей. Нашим читателям, тем не менее, известно лишь соотношение возрастов отца и сына. Тем удивительнее вопрос задачи: «Сколько лет матери?».

▼ *Сколько лет матери?*



Решения

1. Сумасбродные часы вновь покажут точное время в 7 часов, 5 минут, 27 и 3/11 секунды.

Предположим, что у заколдованных часов на самом деле четыре стрелки: две из них движутся правильно, другие две — нет. Стрелки, установленные неверно, покажут точное время только тогда, когда их положение совпадет со стрелками, установленными правильно: иными словами, когда положение часовых и минутных стрелок будет одинаковым. Так как две стрелки установлены неверно, можно считать, что две стрелки, указывающие 12 часов ровно, — это часовая и минутная стрелки. Попытаемся ответить на вопрос: когда совпадут эти стрелки? Именно в этом и заключается вопрос исходной задачи. Ответом к ней будет 5 минут 27 и 3/11 секунды по прошествии 1 часа. Однако в этом случае мы определим только положение минутной стрелки заколдованных часов.

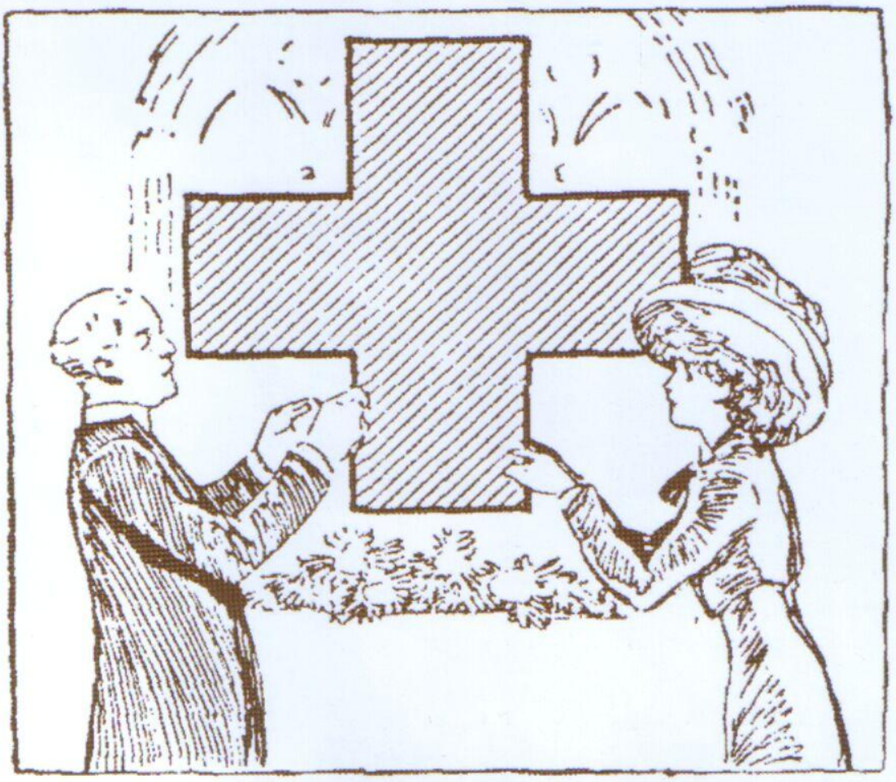
Теперь вновь обратим внимание на пару часовых стрелок, показывающих 6 часов, и увидим, что складывается аналогичная ситуация. Так как одна из стрелок движется подобно минутной, обе стрелки совпадут на том же расстоянии после 6 часов, что и другие две стрелки — после 12.

2. Юная стенографистка выиграет 12,5 доллара в первый год, после чего будет только терять в жалованьи. Некоторые любители задач совершают ошибку, прибавляя суммы, на которые будет увеличиваться жалованье стенографистки, к ее годовому жалованью каждые шесть месяцев, не понимая, что всякий раз ее жалованье будет увеличиваться по сравнению с базовым на 25 долларов в год, что означает прибавку лишь в 12,5 доллара каждые шесть месяцев. Разумеется, благодаря прибавке к жалованию в размере 100 долларов в год стенографистка заработает 600 плюс 700 плюс 800 плюс 900 плюс 1000 долларов. В своем варианте стенографистка потеряет 432,5 доллара.

Базовое годовое жалование		
Первое полугодие	$300,00	$600
Второе полугодие	$312,50	$625
Третье полугодие	$325,00	$650
Четвертое полугодие	$337,50	$675
Пятое полугодие	$350,00	$700
Шестое полугодие	$362,50	$725
Седьмое полугодие	$375,00	$750
Восьмое полугодие	$387,50	$775
Девятое полугодие	$400,00	$800
Десятое полугодие	$412,50	$825

3. Возраст матери — 29 лет и 2 месяца. Возраст Томми — 5 лет 10 месяцев, его отцу 35 лет ровно.

Задачи с лоскутами



▲ *Греческий крест состоит из пяти квадратов равного размера.*

1. Два креста из одного

Разделите греческий крест на пять частей и составьте из них два греческих креста одного размера. Эта головоломка имеет очень красивое решение.

2. Крест и треугольник

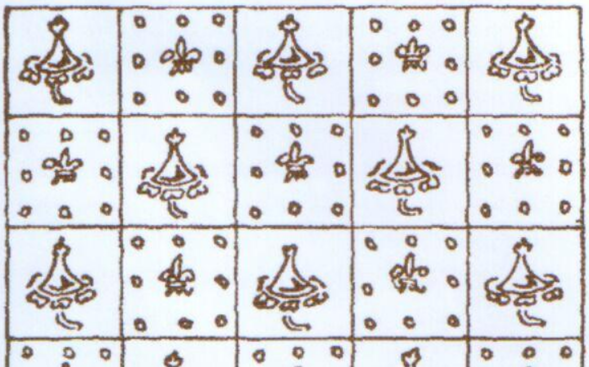
Разделите греческий крест на шесть частей и составьте из них равносторонний треугольник. Эта головоломка сложна, и найти ее решение практически невозможно, если вам неизвестен способ, позволяющий превратить равносторонний треугольник в квадрат.

3. Сложенный крест

Вырежьте греческий крест из бумаги и сложите его так, чтобы всего одним разрезом ножниц его можно было бы разделить на четыре части, образующие квадрат.

4. Одеяла

На рисунке изображен квадратный отрез ткани. Некая дама захотела разрезать его на четыре части так, чтобы из двух кусков получилось одеяло в форме идеального квадрата, а из двух оставшихся — еще одно квадратное одеяло. Как решить задачу? Разумеется, ткань можно разрезать только вдоль линий, делящих ее на 25 маленьких квадратов, при этом узор не должен нарушаться. Эта головоломка имеет всего одно решение. Сможете найти его?

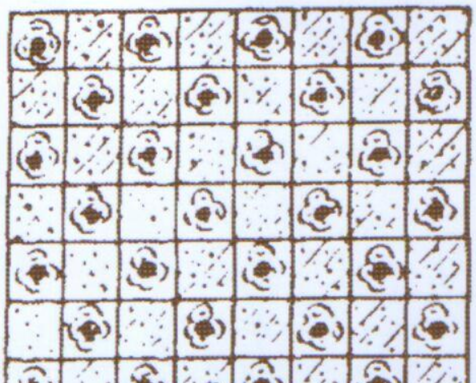


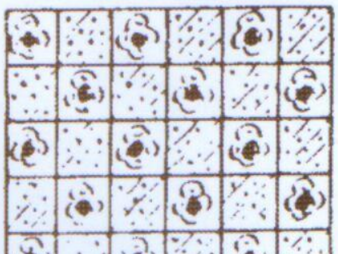
5. Квадратные отрезы ткани

Как-то раз, будучи в гостях у одной дамы, я взял со стола два прекрасных квадратных отреза расшитой золотом ткани. Оба отреза имели одинаковый узор — рисунок тонкой работы мастеров Востока, напоминавший шахматную доску.

— Разве они не прекрасны? — спросила меня подруга. — Их мне привезла кузина, которая недавно вернулась из Индии. Теперь мне нужна твоя помощь. Как видишь, я решила сшить их вместе, чтобы получилась квадратная шаль. Как это сделать так, чтобы отходов было как можно меньше? Разумеется, разрезать ткань можно только вдоль линий, которые делят ее на маленькие квадраты.

Я разрезал два квадратных отреза ткани на четыре части, из которых затем составил один большой квадрат так, чтобы не нарушить узор. Когда я закончил работу, то заметил, что обе части имели одинаковую площадь, то есть содержали одинаковое число квадратов. Сможете показать, как нужно разрезать ткань в соответствии с этими условиями?





Решения

1. Один крест нужно вырезать полностью (на рис. 1 он обозначен буквой A). Части, обозначенные буквами B, C, D и E, образуют второй крест, как показано на рис. 2. Этот крест будет иметь в точности тот же размер, что и первый. Предлагаем читателю определить оптимальное направление разрезов самостоятельно.

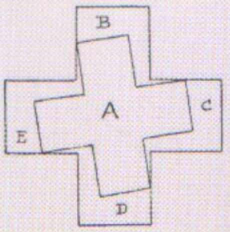


Рис. 1

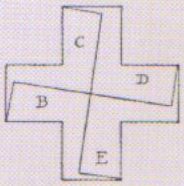
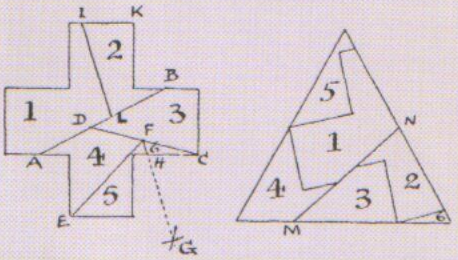


Рис. 2

Задам вам один сложный вопрос: как составить три греческих креста из одного так, чтобы число фрагментов было наименьшим? Эту задачу можно решить, разрезав исходный крест всего на 13 частей. Я уверен, что многие из моих читателей, сведущие в геометрии, с радостью примутся за решение этой задачи, которое я не буду приводить здесь и оставлю загадку без ответа.

2. Линия AB на рисунке обозначает сторону квадрата той же площади, что и крест. В одном из прошлых выпусков я показал, как построить квадрат и равносторонний треугольник одинаковой площади. Таким образом, я не буду останавливаться на том, какие размеры должен иметь треугольник, по площади равный исходному кресту. Будем считать эту задачу рассмотренной. Возникает вопрос: как разрезать одну из этих фигур на части так, чтобы из них можно было составить другую?



Сначала проведем линию AB, где A и B — середины боковых сторон. Далее проведем линии DC и EF. Их длина в два раза меньше, чем длина стороны треугольника. Теперь проведем дуги одного радиуса с центрами в точках E и F. Эти дуги пересекутся в точке G. Затем проведем отрезок FG. Наконец, построим отрезок IK, равный HC, и LB, равный AD, проведем линию IL, параллельную FG, и тем самым определим форму шести частей. Из этих частей можно составить равносторонний треугольник, как показано на следующем рисунке. Другой вариант — сначала построить линию MN в нашем треугольнике, затем отметить середину стороны треугольника, в которой сходятся части под номерами 4 и 5 в вершине креста E, и повернуть треугольник вокруг этой точки так, чтобы линия MN была параллельна AB. Затем можно нарисовать часть 5, скопировав ее форму с креста, а после этого — все остальные части. Я видел множество попыток решения, в которых предполагается, что треугольник имеет ту же высоту, что и крест. Это не так: крест всегда будет выше, чем треугольник той же площади.

3. Сначала согните крест вдоль линии AB, отмеченной пунктиром на рис. 1. Полученная фигура изображена на рис. 2.

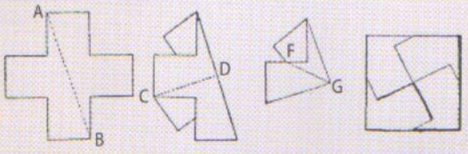
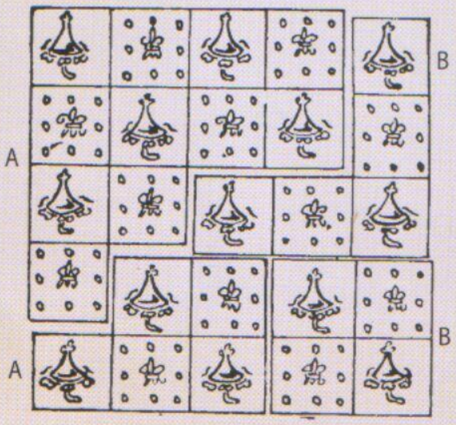


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4

Далее согните лист вдоль пунктирной линии CD (где D — центр креста) и получите фигуру, изображенную на рис. 3. Теперь возьмите в руки ножницы и разрежьте лист вдоль линии GF. В результате лист будет разделен на четыре части одинаковой формы и размера. Из них можно составить квадрат, как показано на рис. 4.

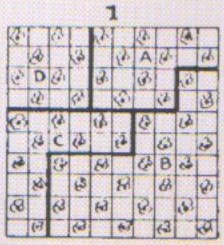
4. Два отреза ткани, обозначенные буквой A, образуют идеальный квадрат; два других отреза, обозначенные буквой B, — второй квадрат (см. предыдущий рисунок).



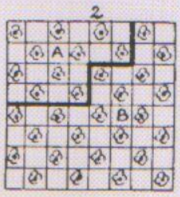
5. Насколько мне известно на данный момент, эта задача имеет всего одно решение, которое полностью удовлетворяет условию. Ткань нужно разрезать так, как показано на рисунке 1. На рисунках 2 и 3 показано, как следует разрезать два исходных квадрата. Вы видите, что части A и C состоят из 20 «клеток», следовательно, их площадь одинакова.

На рисунке 4 (из частей неправильной формы, изображенных на этом рисунке, можно составить второй квадрат, изображенный на рис. 5) представлено решение задачи, в котором, однако, нарушается одно условие: «Я разрезал два квадратных отреза ткани желаемым образом». В этом случае меньший квадрат остается нетронутым. Несмотря на это, я предлагаю этот рисунок читателю как иллюстрацию особенностей задачи.

1



2



3

4

5

В задачах такого типа повернуть любую из частей на четверть оборота нельзя, так как в этом случае нарушится узор. Тем не менее, как в случае F на рисунке 4, можно повернуть асимметричную часть на пол-оборота, то есть расположить ее «вверх ногами». Возможность поворота на четверть оборота или пол-оборота в этих задачах зависит от узора на ткани, используемого материала и формы исходного отреза.

Лучшее от Сэма Лойда
О сыре и узлах

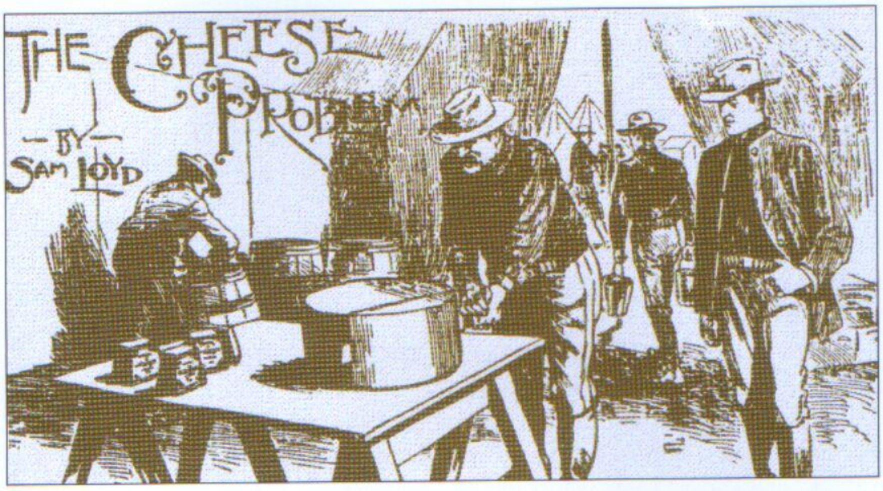
1. Задача о сыре

Идею хорошей головоломки может подсказать что угодно, показавшееся нам новым или интересным, но для грамотного развития темы может потребоваться немало времени и сил. Я часто задаюсь вопросом: «Если какая-то задача заинтересовала меня в обычном виде, когда она не представляла никаких трудностей, то как можно скрыть ее базовый принцип, усложнить ее и придать ей форму настоящей головоломки?». Задачу следует представить так, чтобы объяснить ее суть и в то же время скрыть ее истинную сложность, наделив ее «легкой и детской» простотой, по словам Брета Харти. Внимание читателя может отвлечь даже название задачи. Много веков назад один философ написал: «Ars est celare artem», тем самым давая любителям головоломок понять, что истинное искусство заключается в умении скрывать искусство. Именно в этом — основная разница между современными и древними головоломками.

Как-то раз я оказался в воинской части, где денщик нарезал сыр на порции, и удивился тому, как хитроумно он справлялся с задачей. Чем больше я размышлял над этим эпизодом, тем больше понимал, что это счастливое совпадение можно представить в виде головоломки. Я похвалил денщика в разговоре с интендантом, на что тот ответил: «О, это еще что! Вы бы видели, как он нарезает пироги!».

В задаче о разрезании пирога рассматривается плоская поверхность, таким образом, в ее решении используются квадратные корни, или вторые степени, как сказали бы математики. В задаче о нарезке сыра мы выходим за пределы поверхности, и здесь не обойтись без кубических уравнений, также известных как уравнения третьей степени, поскольку в задаче требуется учесть длину, ширину и высоту куска сыра.

Можете ли вы назвать наибольшее количество частей, на которые можно разделить кусок сыра шестью прямолинейными разрезами?



▲ *На сколько частей солдат разделил кусок сыра шестью прямыми разрезами?*

2. Интересный план жилищного займа

Случайная, но интересная задача, взятая из повседневной жизни, часто оказывается поучительной. Далее я представлю задачу, основанную на привычном действии, которую поймет любой, даже тот, кто совершенно не знает математики. В действительности эту задачу предложил человек, который был настолько несведущ в арифметике, что не мог сосчитать даже простых процентов. Он так боялся быть обманутым, что отказывался использовать любой метод за исключением того, о котором о мы сейчас расскажем.

По всей видимости, он хотел приобрести недвижимость, но располагал лишь частью нужной суммы и опасался чисел, ипотеки и процентов. Поэтому он сказал, что не совершит покупку, если этого не позволит некий «план жилищного займа». Он мог заплатить наличными 1000 долларов и внести еще пять платежей по 1000 долларов по прошествии 12 месяцев каждый. Эти платежи должны были покрыть стоимость жилья с учетом процентов на дату каждого платежа.

Сделка была заключена на этих условиях. Учитывая, что стоимость денег для продавца составила 5 % годовых, определите реальную стоимость недвижимости.

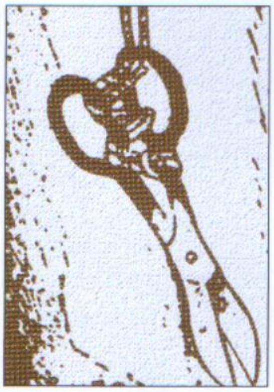
3. Гордиев узел

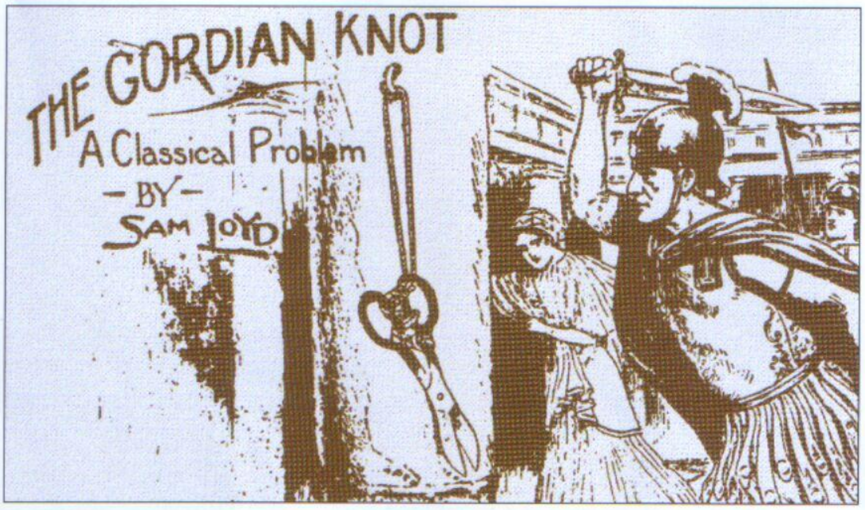
Разумеется, сегодня, по прошествии стольких лет, уже нельзя исправить величайшую несправедливость, жертвой которой стал бедный Гордий. Тем не менее мы как истинные любители головоломок можем осудить Александра Македонского, который, участвуя в турнире по решению головоломок, провозгласил себя судьей и присвоил себе приз, предложив абсурдное решение. Тем самым он создал опасный прецедент, став примером для многих своих последователей.

Нам часто встречаются юные Александры, которые любят решать головоломки по своим правилам и заполучать призы пиратскими способами.

Гордий был простым крестьянином, который пас овец и выращивал виноград и благодаря острому уму стал царем Фригии. Говорят, что когда он взошел на трон, то связал свои старые инструменты узлом, вошедшим в историю под названием «гордиев узел», который нельзя было развязать. Оракулы провозгласили, что тот, кому удастся развязать этот узел, станет императором.

По легенде, Александр Великий безуспешно пытался развязать несколько узлов, после чего пришел в ярость, обнажил меч и разрубил веревку, воскликнув: «Так здравый смысл велит достигать желаемого». Удивительно, что те, кому известна эта история и ее печальный финал, поддерживают Александра Македонского, когда преодолевают какую-либо трудность и с некоторой гордостью говорят: «Я разрубил гордиев узел!».





Все историки и писатели, касавшиеся этой темы, сходились на том, что головоломка была честной. Она была описана столь точно и подробно, что не раз предпринимались попытки нарисовать ее. Некоторые последователи Гордия изобрели интересные и сложные узлы, и я задумался: будут ли они довольны результатом, если кто-то развяжет эти узлы методом Александра Македонского? Критика подобного решения, по крайней мере, из тех, что помню я, содержится в нескольких разумных и, должно быть, очень древних строчках: «Нетерпеливые господа, головоломку не решают, подсмотрев ответ; когда Гордий, царь-крестьянин Фригии, связал свои инструменты известным узлом, Александру поспешному не удалось развязать его, разрубив пополам».

Когда я работал над этой головоломкой, то основывался прежде всего на энциклопедических данных, однако уделил особое внимание одному описанию. Авторы всех энциклопедий сходились в одном: веревка была завязана так, что ее концов не было видно, а инструменты оказались привязаны к столбу в храме. Я придерживаюсь версии Латимера, который считает, что инструменты могли быть связаны по отдельности, и подчеркну особо, что в числе инструментов он упомянул садовые ножницы.

Возьмите кусок обыкновенной веревки длиной примерно в один ярд и свяжите ее концы. Возьмите обычные ножницы и поместите веревку так, как показано на рисунке, но не зацепляйте ее за крюк, а наденьте на шею удобно сидящей девушке на манер ожерелья. Если вам удастся развязать узел и достать ножницы, юная леди, несомненно, поможет вам заполучить корону Азии.

Решения

1. Кусок сыра был разделен первым разрезом на 2 части, вторым — на 4, третьим — на 8, четвертым — на 15, пятым — на 26, шестым — на 42.

Это максимально возможное число частей, на которые можно разрезать кусок сыра без дырок прямолинейными разрезами. Из этой последовательности нетрудно вывести следующее кубическое уравнение, выразив тем самым фундаментальную зависимость между максимальным числом частей и числом разрезов n:

$$\frac{n^3 + 5n}{2} + 1 = \text{число частей.}$$

2. Далее изложен простой метод, позволяющий найти ответ. Многие предпочтут использовать другой способ. Будем решать задачу с конца и рассмотрим последний платеж. Найдем ответ на вопрос: «От какой суммы денег последний платеж составляет 105 %?». Если вы разделите 1000 долларов на 1,05, то увидите, что последний платеж составит 952,3809 доллара плюс 5 %.

Вернемся к предыдущему платежу и определим сумму, от которой 1952,3809 доллара составляют 105 %. Вновь разделив на 1,05, получим 1859,4103. Добавим к этой сумме еще один платеж в 1000 долларов и получим 2859,4103 доллара. Разделив эту величину на 1,05, получим 2723,2479.

Прибавим к этой сумме еще 1000 долларов, получим 3723,2479 доллара. При последующем делении получим 4329,4764. Именно для этой цифры нужно рассчитать проценты после первого платежа в 1000 долларов. Таким образом, реальная стоимость недвижимости составляет 5329,4764 доллара, так как эта сумма плюс 5 % в точности равна шести платежам по 1000 долларов, внесенным согласно договоренности.

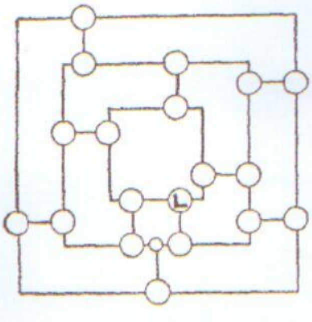
3. Чтобы развязать узел и достать ножницы, нужно провести петлю под двойной веревкой. Сначала нужно продеть веревку через левое кольцо, затем через правое, потом через левое, далее опять через правое. Теперь проведите петлю над ножницами. Вытягивая веревку, вы завяжете на ней узел, а ножницы окажутся свободными.

Лучшее от Генри Э. Дьюдени

Новые задачи

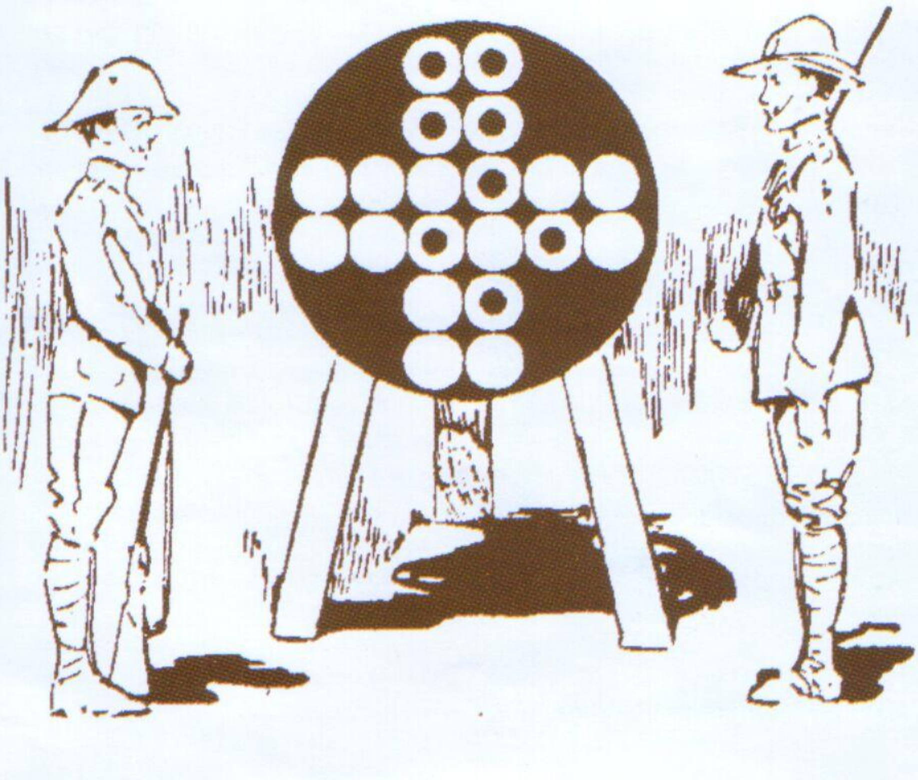
1. Поездка на автомобиле

На представленной схеме кругами обозначены города, линиями — автомобильные дороги в хорошем состоянии. Сколькими способами автомобилист может, выехав из Лондона (на схеме он обозначен буквой L), объехать все города ровно один раз и вернуться в Лондон? Два маршрута, один из которых является полностью обратным другому, считаются одинаковыми.



2. Мишень в форме креста

На иллюстрации изображена любопытная мишень, созданная эксцентричным стрелком. По его задумке, для победы нужно поразить четыре круга четырьмя выстрелами так, чтобы пулевые отверстия образовали квадрат. Как видно на мишени, две попытки оказались успешными. Первый стрелок поразил четыре круга в верхней части креста так, что отверстия в мишени образовали квадрат. Второй стрелок попытался поразить четыре круга в нижней части мишени, но второй выстрел (слева) пришелся слишком высоко. В результате ему пришлось поразить мишени не так, как он хотел вначале. Таким образом, вне зависимости от того, какой круг будет поражен первым выстрелом, второй круг укажет, куда нужно будет стрелять, чтобы пулевые отверстия образовали квадрат. Цель задачи — определить, сколькими способами можно образовать квадрат на мишени четырьмя выстрелами.



▼ Сколькими способами можно образовать квадрат на мишени четырьмя выстрелами?

3. Задача об акростихах

Не приходило ли вам в голову подумать о разнообразии и ограничениях, накладываемых на первые и последние буквы в словах двойного акростиха*? К примеру, нужно найти слово, которое начинается на А и заканчивается на Б, В, Г и так далее. Некоторые сочетания букв в русском языке невозможны: так, ни одно слово не начинается с мягкого знака. Однако мы будем предполагать, что для каждого возможного сочетания букв найдется одно слово. Сколько пар букв (начальных и конечных) можно составить?

4. Честный молочник

Честный молочник, чтобы приготовить молоко для покупателя, взял бидон В, в который было налито молоко, и бидон А, в котором находилась вода. Молочник перелил достаточно воды из бидона А в бидон В так, чтобы объем содержимого бидона В удвоился. Затем он перелил содержимое бидона В в бидон А так, что объем содержимого бидона А вновь удвоился. Наконец, он перелил содержимое бидона А в бидон В так, что объем содержимого обоих бидонов сравнялся. Затем он отправил бидон А в Лондон. Задача заключается в том, чтобы определить соотношение воды и молока в бидоне, предназначенном для лондонцев. Содержал ли бидон воду и молоко в одинаковой пропорции, или воды в нем было в два раза больше, чем молока, или соотношение было каким-то иным? Это интересный вопрос, так как в задаче не говорится, сколько воды и молока было в бидонах вначале.

---

* Двойной акростих — это стихотворение, как правило, посвященное кому-либо или чему-либо, в котором первые и последние буквы строк образуют задуманное слово. Так, по первым и последним буквам строк следующего акростиха можно прочесть слово «холод»:

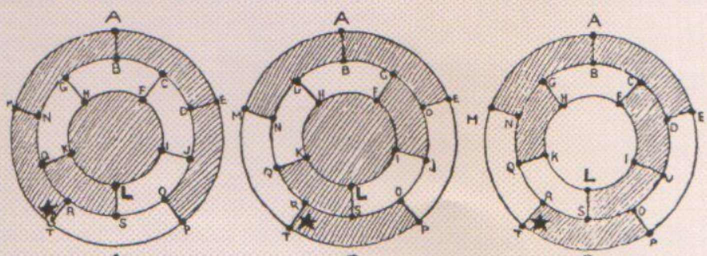
Холод и звон вне комнаты зати**Х**,
Однако здесь пока тепло, светл**О**.
Летают насекомые, нет си**Л**.
Ох, закрываю в ужасе окн**О**.
Да, утречком ужасный будет ви**Д**.

5. Винная бочка

Напоследок я предлагаю вам одну любопытную задачку. У некоего человека была винная бочка объемом в десять галлонов, полная вина, и кувшин. Как-то раз он наполнил кувшин вином из бочки и вылил в бочку кувшин воды. Затем, когда вино и вода как следует перемешались, он снова наполнил кувшин вином из бочки и вновь долил в бочку кувшин воды. После этого он обнаружил, что вино и вода находились в бочке в равной пропорции. Сможете ли вы на основе этих данных определить объем кувшина?

Решения

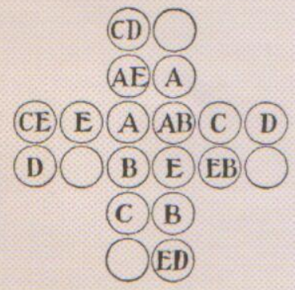
1. Прежде всего я попрошу читателя сравнить исходную схему с круговыми диаграммами, изображенными на рисунках 1, 2 и 3.



Если мы какое-то время не будем обращать внимание на закрашенные области (их предназначение я объясню позднее), то увидим, что в каждом случае круговая диаграмма есть всего лишь упрощенная исходная схема. Иными словами, в обоих случаях дороги из города A ведут в B, E и M, дороги из L (Лондона) ведут в I, K и S и так далее. Круговые симметричные диаграммы лучше подходят для нашего объяснения, чем механическое решение, при этом на круговой диаграмме все условия задачи полностью сохранены. Если бы в задаче учитывались расстояния между городами, то новые диаграммы потребовалось бы дополнить числами, указывающими расстояния. Возможно, полученные диаграммы оказались бы непрактичными.

Теперь нарисуйте три круговые диаграммы на листе бумаги, возьмите в руки ножницы и вырежьте закрашенные области на диаграммах. Можно показать, что каждый маршрут, если изобразить его красным карандашом, либо пройдет по краю диаграммы, либо будет отражением маршрута, проходящего по краю диаграммы. Обратите внимание на рис. 1. На этой диаграмме звездочкой помечен город T. Таким образом (если следовать вдоль края диаграммы), мы получим один из возможных круговых маршрутов, начинающихся в Лондоне: L, S, R, T, M, A, E, P, O, J, D, C, B, G, N, Q, K, H, F, I, L. Если мы перейдем на другую сторону, получим маршрут L, I, F, H, K, Q и т. д., однако эти обратные маршруты считаются различными. После того как вы провели первый маршрут, поверните диаграмму так, чтобы звездочка указывала город M, и вы получите второй маршрут. Когда звездочка будет указывать город A, вы получите третий маршрут, E — четвертый, P — пятый. Так вращением диаграммы вы получили пять разных маршрутов. Очевидно, что если теперь мы возьмем в руки лист бумаги и перевернем его другой стороной вверх, то полным поворотом диаграммы получим пять новых маршрутов.

Таким образом, вы видите, что с помощью диаграммы, изображенной на рис. 1, можно незамедлительно провести 10 маршрутов без каких-либо трудностей. Если вы используете диаграммы, изображенные на рис. 2 и 3, то получите еще по 10 маршрутов. Эти 30 маршрутов являются единственно возможными. Я не буду приводить доказательство того, что три указанные диаграммы содержат все возможные случаи, и предлагаю читателям найти это доказательство самостоятельно. Если вы случайно обнаружите новый маршрут, то, несомненно, увидите, что он попадает в одну из трех групп.



2. Можно выбрать 21 квадрат. Из них 9 будут иметь тот же размер, что и квадрат, указанный на диаграмме буквами A, четыре — размер, указанный буквами B, четыре — размер, указанный буквами C, два — размер, указанный буквами D и два — размер, указанный верхней отдельно стоящей буквой A, верхней отдельно стоящей буквой E, нижней отдельно стоящей буквой C и буквами EB.

Интересно, что ни один из 21 квадрата нельзя составить, не использовав как минимум один из шести кругов, обозначенных буквой E.

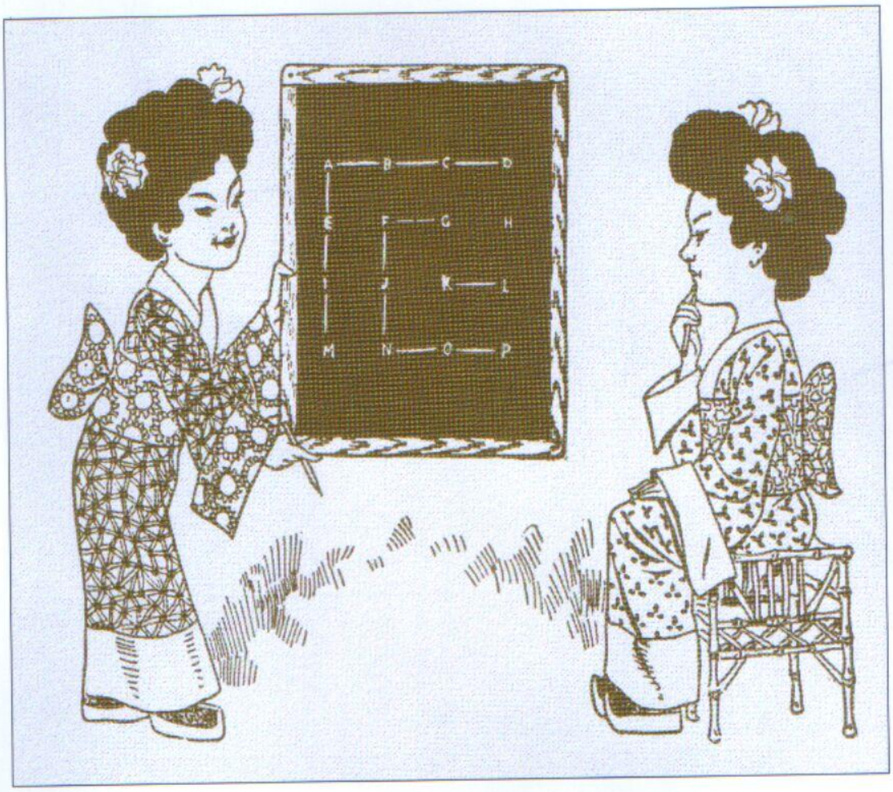
3. В русском алфавите 33 буквы, для каждой из них можно составить три разные пары. Кроме того, каждую из этих пар можно перевернуть, поменяв местами первую и последнюю буквы. Таким образом, общее число пар будет равно 1056. Кроме того, первая и последняя буква могут совпадать, что дает еще 33 пары. Таким образом, общее число пар равно 1089. Иными словами, ответ всегда будет равен квадрату числа букв в алфавите.

4. Вне зависимости от исходного объема воды и молока их соотношение в бидоне, отправленном в Лондон, всегда будет равно 3 частям воды к 1 части молока. Сделаем несколько наблюдений. Изначально воды должно быть больше, чем молока, так как в противном случае в бидоне A не хватило бы воды, чтобы объем его содержимого удвоился при втором переливании. Воды не должно быть в три раза больше, чем молока, в противном случае в бидоне B будет недостаточно жидкости для второго переливания. Третье переливание не повлияет на содержимое A, так как соотношение воды и молока в этом случае должно быть тем же, что и при втором переливании. Чтобы избежать ошибок, мы не рассматриваем случай, в котором объем воды и молока изначально был одинаковым. Несмотря на то, что удвоенное «ничего» будет по-прежнему «ничем», выполнить третье переливание в этом случае не удастся.

5. Вместимость кувшина составляет чуть меньше 3 галлонов; если точнее, 2,93 галлона.

Лучшее от Сэма Лойда

Китайские и голландские задачи



▲ *Каков лучший ход и сколько квадратиков удастся замкнуть этим ходом?*

1. Задача о маленьких квадратах

Сейчас я расскажу вам об известной игре родом с Востока, очень похожей на знаменитую игру «Та-Те-Ти». Одна из китаянок написала на доске 16 букв в четыре строки, как показано на рисунке, затем провела прямую между буквами A и B, после чего ее соперница соединила буквы E и A. Если теперь первая девушка соединит E и F, то вторая проведет линию между B и F, образуется квадратик, и вторая девушка получит право еще на один ход. Однако соперницы действовали столь умело, что ни одной из них не удалось замкнуть квадратик, хотя каждая сделала по шесть ходов. Игра достигла критического момента, в котором одна из девушек обязательно победит, так как у нее нет другого выхода. Право хода имеет сидящая девушка. Если она соединит буквы M и N, ее соперница замкнет сразу четыре квадратика одним ходом и получит право еще на один ход, на котором она соединит H и L и замкнет все оставшиеся квадратики.

Какой ход вы порекомендуете совершить девушке и сколько квадратиков она выиграет по сравнению с наилучшим из возможных ходов второй девушки?

Напомним, что, если одному из игроков удается замкнуть квадратик, он получает право еще на один ход.

Предположим, что один из игроков соединил D и H. Затем второй игрок соединил H и L, и вне зависимости от того, какой ход сделает первый игрок, второй выиграет девять квадратиков.

Эта игра требует немалой сноровки, в чем вы убедитесь сами, сыграв несколько партий.

2. Голландские жены

В нашей стране до сих пор сохранились некоторые старинные голландские обычаи, в частности обмен скотом, домашней птицей и продуктами в самых разных количествах: яйца торгуются по 20 штук, прочие продукты — десятками, пригоршнями, кучками или другими малыми мерами веса. Например, сахар отвешивается по три с половиной фунта и так далее.

Одна любопытная древняя задача, опубликованная пару веков назад в сборнике анекдотов старого Манхэттена, показывает, сколь сложным способом голландские колонисты вели торговлю.

В этом сборнике можно прочесть такие строки: «Меня пришли повидать трое голландских друзей, которые только что сыграли свадьбу и посему привели с собой жен. Моих друзей звали Хендрик, Клаас и Корнелиус, их жен — Геертринг, Катрун и Анна, но я позабыл, кто на ком был женат. Они сказали мне, что ходили на рынок, дабы купить свиней, и каждый из них купил столько свиней, сколько шиллингов заплатил за каждую. Хендрик купил на 23 свиньи больше, чем Катрун, а Клаас — на 11 больше, чем Геертринг. Они также сказали, что каждый мужчина заплатил на три гинеи (63 шиллинга) больше, чем его супруга. Я хочу узнать, возможно ли по этому описанию сказать, как звали супругу каждого из моих друзей».

Эту любопытную задачу легко решить, если применить несколько хитроумных экспериментальных методов.

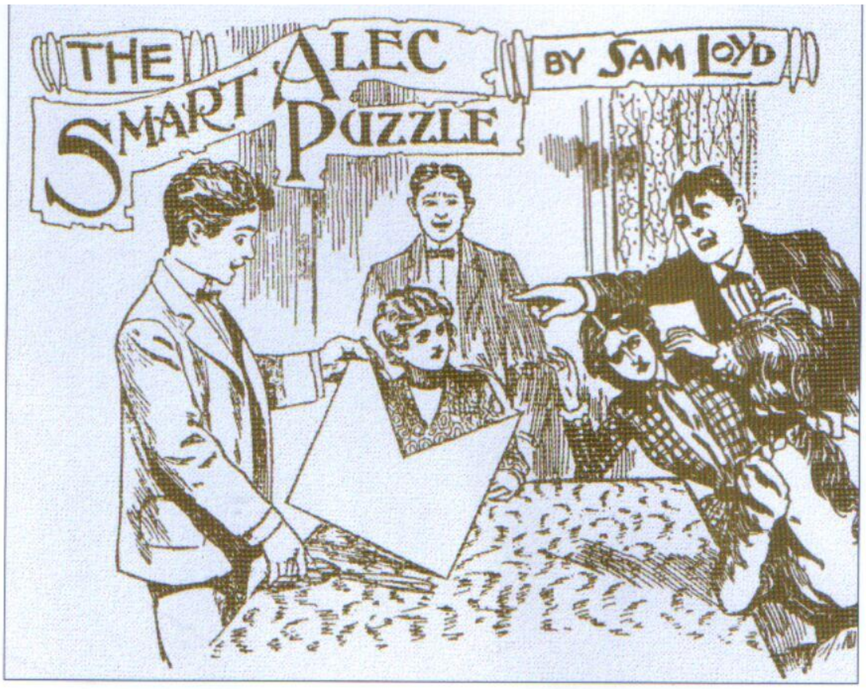
3. Задача смышленого Алекса

Любой, кто задавал какую-нибудь задачу группе друзей, знаком с Алексом и его манерой доказывать, что он знает все о задаче, еще до того, как услышит объяснение. Если задача ему знакома, он сразу же говорит ответ, не давая остальным возможности подумать. Если же задача ему незнакома, он принимается доказывать, что она похожа на другую, известную ему и, разумеется, более сложную задачу. Как правило, его объяснения заставляют вспомнить о персидской пословице: «Тот, кто не знает, и не знает об этом, всем докучает». Заставить Алекса признать свое поражение — подлинное удовольствие. Именно это произошло в случае, о котором я сейчас расскажу.

Гарри собирался продемонстрировать своим юным друзьям увлекательную головоломку, когда его прервал Алекс, который счел, что это знаменитая старинная головоломка, знакомая всем любителям занимательных задач под названием «Задача Митры». Эта головоломка известна широкой публике вот уже почти 500 лет. В ней нужно разрезать лист бумаги на четыре части одинаковой формы и размера.

В ответ на хвастливое заявление Алекса, который попытался объяснить решение, Гарри быстро воскликнул:

«Превосходно! Задача заключается в том, чтобы разрезать лист бумаги на минимально возможное число частей, из которых можно сложить квадрат. Я сам позабыл ответ, однако мой друг Алекс с радостью напомнит его».



Решения

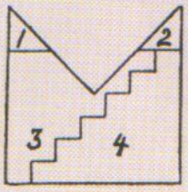
1. Эта головоломка содержит множество удивительных вариантов и предоставляет широчайший простор для тонких расчетов. Первый игрок должен замкнуть 7 квадратиков, проведя линию, соединяющую G и H. Если затем второй игрок соединит J и K, первый сможет замкнуть 2 квадратика, соединив K и O, а затем P и L, после чего сделает ожидаемый ход, соединив L и H, вместо того чтобы замкнуть еще 2 квадратика. Тогда другой игрок замкнет 2 квадрата, соединив G и K, после чего обязан будет совершить еще один ход, который даст первому игроку возможность замкнуть 5 квадратиков. Если затем первый игрок соединит G и H, второй игрок соединит D–H, B–F, E–F, после чего совершит ожидаемый ход M–N, то гарантированно замкнет еще 4 квадратика. Этот интересный прием, при котором игрок отказывается от возможности сразу же замкнуть 2 квадратика, чтобы чуть позже замкнуть еще больше квадратиков, — самая интересная часть игры.

(Эта игра, которая знакома американским школьникам под названием «Точки и квадраты», возможно, самая простая и популярная из всех топологических игр. В нее можно играть на прямоугольных досках разных размеров. Проанализировать все возможные варианты на квадратной доске размером 3 × 3 нетрудно, однако доска 4 × 4, которую рассматривает Лойд, уже достаточно сложна. Нам неизвестны какие-либо публикации, где бы описывалась выигрышная стратегия для первого или второго игрока. Так как число квадратов нечетно, игра не может завершиться ничьей. В 1951 году Ричард Хейнс, проживавший по адресу 20-я улица, 1215, Талса, штат Оклахома, создал интересную трехмерную версию этой игры под названием «Кьюбиклы». Чтобы получить специальный блокнот с листами, размеченными для игры в «Кьюбиклы», отправьте доллар господину Хейнсу по указанному адресу.

В эту игру также можно играть на поле из треугольных или шестиугольных ячеек.)

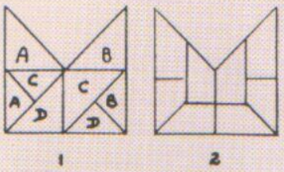
2. Геертринг купила 1 поросенка за 1 шиллинг, а ее муж, которым был не кто иной, как Корнелиус, купил 8 свиней по 8 шиллингов за каждую. Катрун купила 9 свиней по 9 шиллингов каждая, следовательно, ее муж Клаас купил 12 свиней по 12 шиллингов каждая. Анна купила 31 большую свинью по 31 шиллингу каждая, а ее достопочтенный супруг Хендрик купил 32 свиньи по 32 шиллинга каждая.

3. Чтобы разрезать лист на минимально возможное число частей согласно условиям задачи, сначала нужно отрезать треугольники 1 и 2 и поместить их в центре. Затем нужно разрезать лист зигзагообразно, как показано на рисунке, после



чего сместить часть под номером 4 вниз, и вы получите квадрат из 4 частей.

(По иронии, в этой задаче, которую Лойд предложил, чтобы пристыдить «смышленого Алекса», который думает, что все знает, сам старый мастер допустил грубую ошибку. Как тщательно объясняет Генри Дьюдени в задаче № 150 своих «Математических головоломок и развлечений», метод Лойда верен только для прямоугольников с определенным соотношением сторон. В этом случае отношение длин сторон треугольника равно 3 к 4, поэтому разрезать лист так, чтобы составить квадрат, не получится. Дьюдени представил исправленное решение, в котором лист бумаги нужно разрезать на 5 частей. Решение, в котором лист бумаги нужно разрезать на 4 части, так никогда и не было найдено.



Даже старую «Задачу Митры», упоминаемую Лойдом, в которой нужно разрезать лист на четыре части равной формы и размера, можно решить при одном условии: элементы, обозначенные одинаковыми буквами (см. рис. 1), соединяются углами, поэтому их можно считать единым целым! Лойд также опубликовал более корректное решение, в котором лист делится на восемь частей. Это решение представлено на рис. 2.

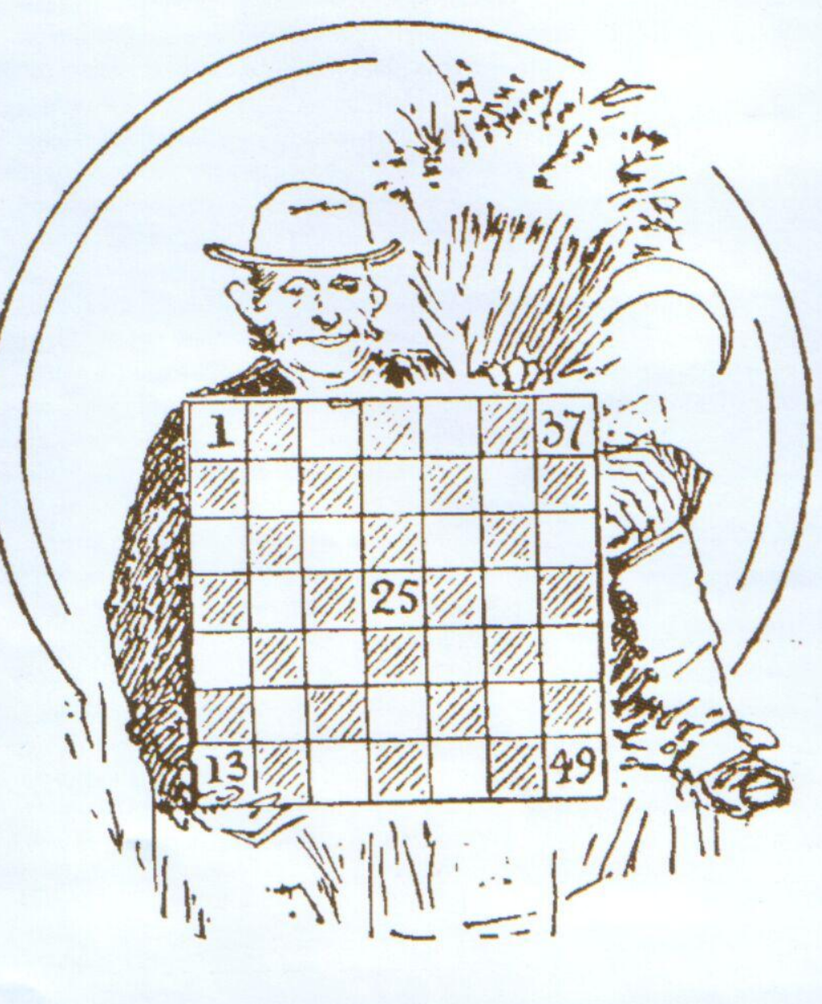
Лучшее от Генри Э. Дьюдени

Три шахматные задачи

1. Поля фермера Лоуренса

Одно из самых привлекательных мест для летней прогулки в окрестностях Лондона — это часть Бакингемшира под названием Шахматная долина. По меньшей мере так это место называлось еще несколько лет назад, до того как о нем прознали строительные компании. В начале этого столетия в Шахматной долине, неподалеку от Латимеров, жил достопочтенный, но эксцентричный фермер по фамилии Лоуренс. Одна из его экстравагантных идей заключалась в том, что всякий, кто жил близ Шахматной реки, должен был уметь играть в эту благородную игру. Дабы укрепить эту мысль в сознании соседей и домочадцев, фермер порой прибегал к довольно странной терминологии. Например, когда овца приносила ягненка, он говорил что она «провела пешку в ферзи»; когда он ставил новый амбар у дороги, то говорил, что «делает короткую рокировку», а когда он посылал человека с ружьем прогнать соседских птиц со своих полей, то называл это «атакой ладей противника».

Соседей забавляли шутки старого фермера Лоуренса, и некий деревенский озорник, которого почтенный джентльмен отодрал за уши за то, что он обидел его «пешек», назвал Лоуренса «старым конем». Как-то Лоуренс повелел разделить большое квадратное поле на 49 участков, как показано на иллюстрации. В белых квадратах он посеял пшеницу, в черных — ячмень. Когда пришла осень, фермер приказал работникам сначала собрать урожай с участка номер 1 так, чтобы на каждый последующий участок, с которого собирался урожай, можно было перейти с предыдущего ходом коня. Тринадцатым по очереди должен был стать участок номер 13, двадцать пятым — участок номер 25, тридцать седьмым — участок номер 37, последним, сорок девятым — участок под номером 49. Для бедного управляющего это было уже слишком, и каждый день Лоуренсу приходилось самому идти в поле, чтобы указать, с какого участка требовалось собрать урожай. Возможно, эта задача не доставит никаких трудностей моим читателям.



▼ *Старый Лоуренс засеял белые квадраты пшеницей, черные — ячменем.*

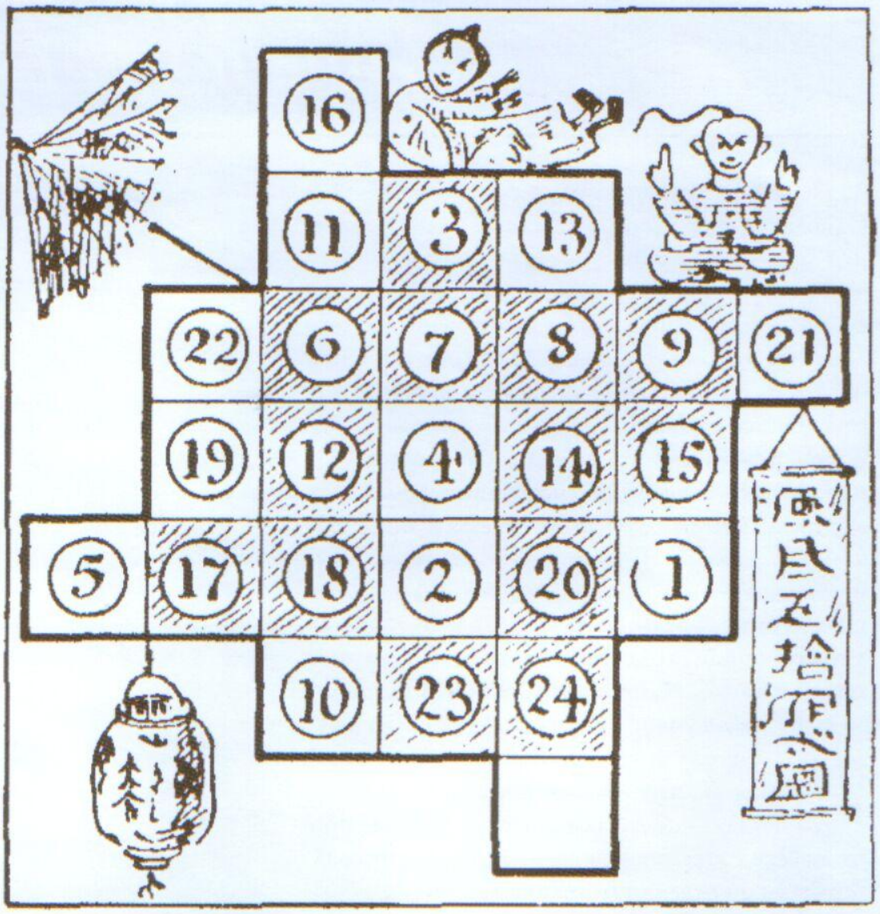
2. Обход граней куба ходами коня

Несколько лет назад я прочитал, что Александр Теофил Вандермонд, блестящий математик, который родился в 1736 году, а умер в 1793-м, большое внимание уделял ходам шахматного коня. За исключением немногих фрагментарных упоминаний, мне неизвестны ни судьба Вандермонда, ни точные результаты его исследований. Однако мое внимание привлекла одна деталь: Вандермонд предложил задачу о ходах коня на гранях куба, причем каждой гранью была шахматная доска. Мне неизвестно, удалось ли Вандермонду найти решение, но я не видел его в печати. Таким образом я без малейших раздумий принялся за решение этой задачи. Возможно, она заинтересует и читателя.

3. Задача мандарина

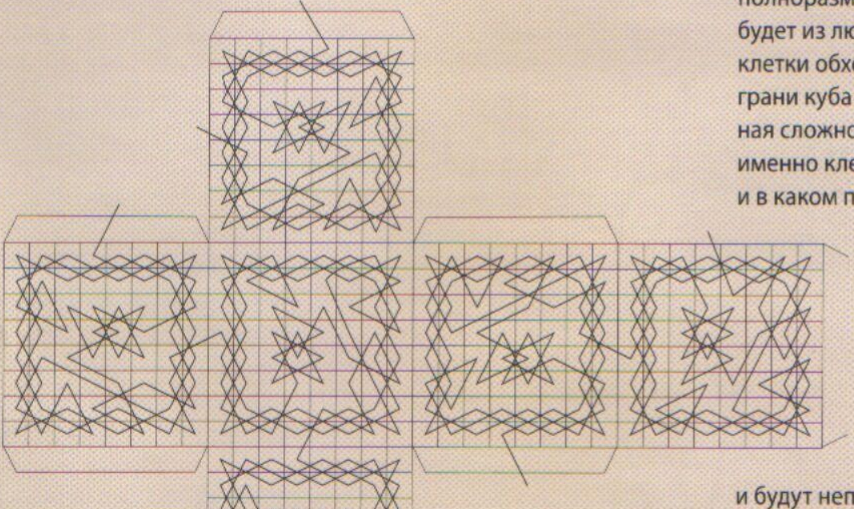
Следующая головоломка интересна еще и потому, что ее решение позволило китайскому юноше завоевать сердце своей возлюбленной. Хи Чум Чоп был богатейшим мандарином во всей округе на сотню миль от Пекина, не счесть было поклонников его прекрасной дочери Пики Бо. Самым пылким из них оказался Винки Хи. Когда он попросил у старого мандарина руки его дочери, тот предложил ему головоломку, пообещав свое согласие, если юноша принесет ему правильный ответ в течение недели. Винки Хи, следуя обычаю, принятому среди некоторых любителей головоломок и до сего дня, предложил головоломку всем своим друзьям, а затем, сравнив решения, лучшее выдал за собственное. К счастью, решение было верным, и мандарин выполнил свое обещание. Для свадебного пира был заколот откормленный щенок, и когда Хи Чум Чоп согласно древней китайской традиции передал Винки Хи кусок печенки, то гости расценили это как пожелание вечного благополучия. У мандарина был стол, разделенный на 25 квадратов, как показано на рисунке. Как вы можете видеть, на каждом из 24 квадратов находилась шашка с номером. Задача состоит в том, чтобы расставить шашки в правильном порядке, передвигая по одной шашке за один раз точно так же, как ходит шахматный конь. Шашку 1 следует поставить туда, где стоит 16; 2 — туда, где 11; 4 — где 13 и так далее. Можно заметить, что все шашки на заштрихованных квадратах стоят там, где и положено. Разумеется, на один квадрат нельзя ставить одновременно две шашки. Сумеете ли вы решить головоломку за наименьшее число ходов?

Дабы сделать способ передвижения шашек совершенно ясным, я отмечу, что первый ход конем можно сделать лишь шашками 1, 2 или 10. Если мы передвинем шашку 1, то затем должны передвинуть шашки 23, 4, 8 или 21. Поскольку каждый раз свободным оказывается лишь один квадрат, то порядок ходов можно указывать следующим образом: 1–21–14–18–22 и т. д. Чтобы попрактиковаться, вам следует набросать рисунок в большем масштабе, использовав вместо шашек кусочки картона.



Решения

1. Эта задача имеет множество решений. Представленный вариант интересен тем, что некоторые ходы следует выполнять вдоль длинных прямых параллельных линий.



2. Если читатель вырежет схему, представленную на рисунке, и склеит ее в форме куба (клей следует наносить на припуски у швов), то получит любопытную иллюстрацию решения задачи.

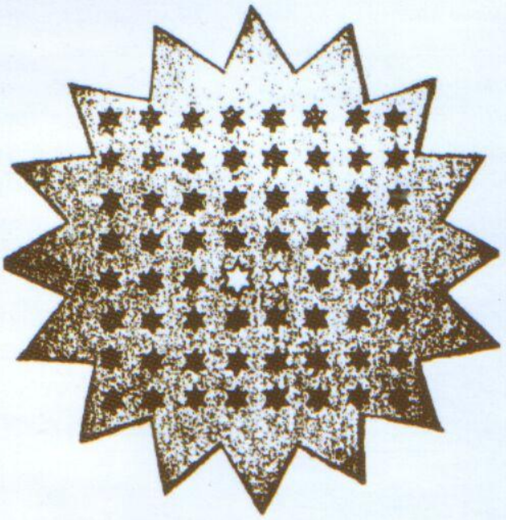
Также можно изготовить похожий куб большего масштаба. Вы обнаружите, что если каждая грань куба представляет собой полноразмерную шахматную доску, то начать обход можно будет из любой из 384 клеток, при этом первая и последние клетки обхода совпадут. Метод, позволяющий перейти с одной грани куба на другую, понять нетрудно, но, разумеется, основная сложность заключается в том, чтобы определить, с какой именно клетки следует переходить на другую грань куба и в каком порядке, а также найти последовательности ходов, удовлетворяющие всем условиям задачи.

3. Один из самых увлекательных аспектов головоломки заключается в том, чтобы определить, стоит ли двигать фишки, стоящие на заштрихованных квадратах (те, что уже стоят на верных местах). Девяносто девять человек из ста решат, что нет никакой выгоды в том, чтобы сдвигать эти шашки, и будут неправы. Самое короткое решение, при котором не нужно двигать ни одну шашку, стоящую на заштрихованном квадрате, состоит из 32 ходов. Тем не менее головоломку можно решить за 30 ходов. Для этого нужно передвинуть шашку с номером 6 или 15 на втором ходу, после чего вернуть на прежнее место на девятнадцатом ходу. Решение выглядит так: 2–6–13–4–1–21–4–1–10–2–21–10–2–5–22–16–1–13–6–19–11–2–5–22–16–5–13–4–10–21. Как видите, оно состоит из 30 ходов.

Задачи обхода и размещения

1. Траектория кометы

В этой головоломке описывается извилистая траектория кометы, которая начинается у маленькой белой звезды. Комета разрушает все созвездие из 62 темных звезд и заканчивает свой путь взрывом большой белой звезды. Начав с малой белой звезды, проведите ломаную линию с минимальным числом звеньев, которая проходила бы через каждую из темных звезд и заканчивалась бы на большой белой звезде.



▲ *Проведите траекторию кометы через все звезды так, чтобы число отрезков было наименьшим.*

2. Первые железные дороги

Вы видите на рисунке участок одноколейной железной дороги, на котором встретились паровозы с четырьмя и тремя вагонами (R — паровоз на правой ветке, L — паровоз на левой ветке). Задача состоит в том, чтобы найти самый быстрый способ развести составы. Боковой тупик может принять одновременно либо один паровоз, либо один вагон.

Использовать канаты, шесты или перекидные мостики нельзя. Кроме того, вагон нельзя цеплять к паровозу спереди. Сколько раз потребуется изменить направление движения паровозов, чтобы поезда разошлись? Каждая перемена направления паровоза считается одним ходом.

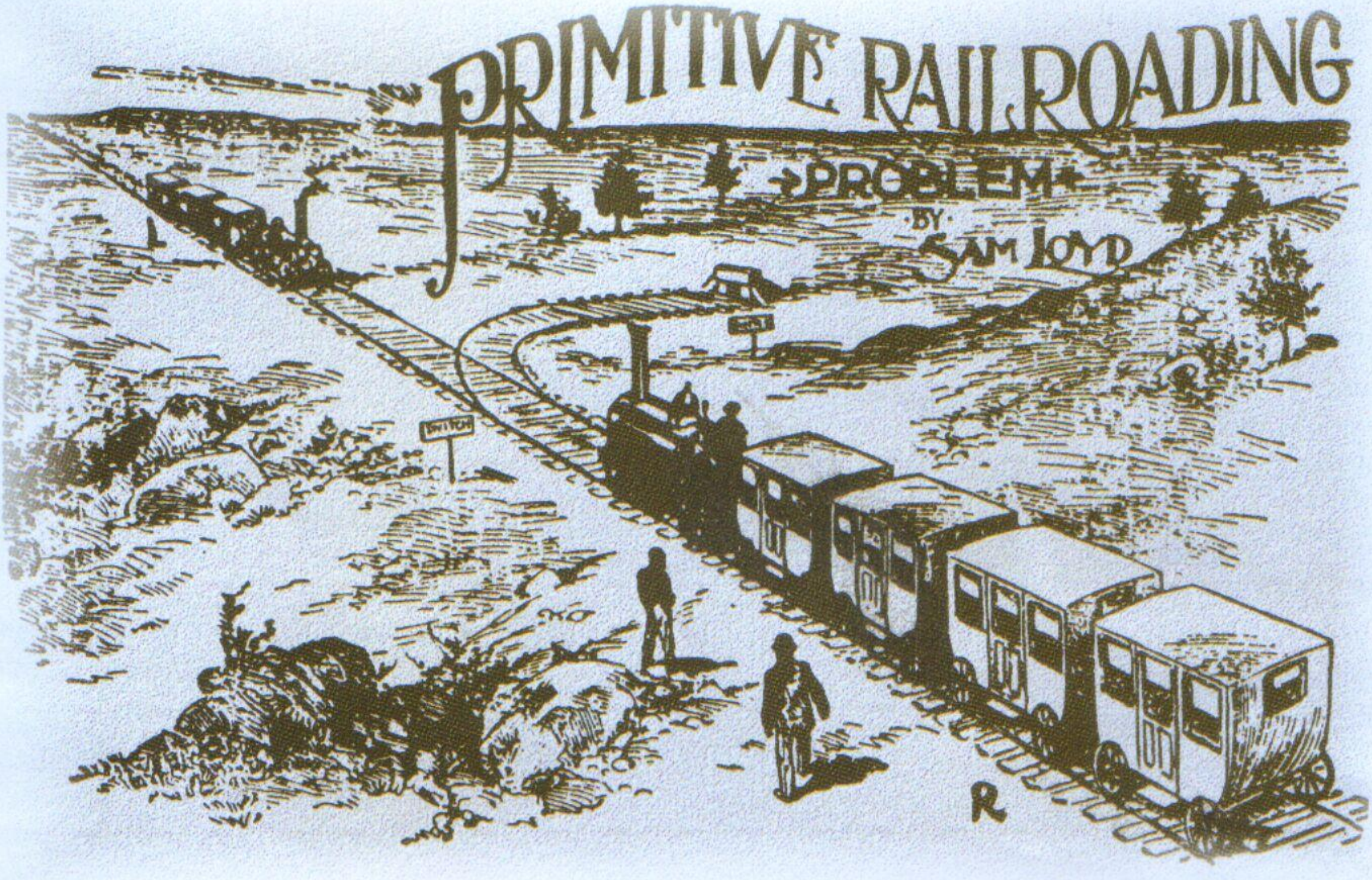
◄ *Найдите самый простой способ развести составы.*

3. Утиная охота в Баззардском заливе

Предмет данной головоломки хорошо знаком любителям утиной охоты в окрестностях Баззардского залива.

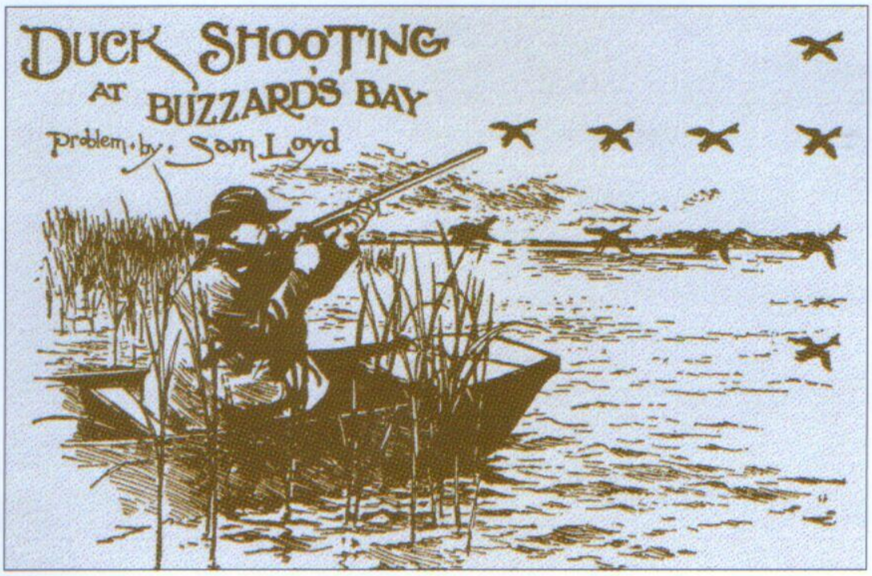
С этим видом охоты связана тысяча и одна головоломка, но я познакомлю читателей лишь с одной небольшой задачкой, которая характерна именно для моей манеры охотиться на уток. Разумеется, поразить несколько уток одним выстрелом — это подвиг. Совершить его можно лишь в случае, если несколько уток располагаются на одной прямой. Я принялся изучать принцип, по которому выстраиваются в ряд утки в Баззардском заливе; возможно, недостаток мастерства в стрельбе помог мне заметить кое-что интересное.

Я заметил, что утки над Баззардским заливом обычно летят двумя рядами с вожаками по сторонам, как показано на рисунке.



Поэтому через стаю можно провести три прямые по четыре утки в каждой. И вот однажды я навел ружье вдоль такой прямой из четырех птиц, надеясь уложить одним выстрелом нескольких уток, и спустил курок. Я мог бы на худой конец просто попасть в пару уток, но мое честолюбивое желание сбить либо всех четырех, либо ни одной привело меня к следующему интересному открытию. Как только рассеялся пороховой дым, я увидел, что птицы изменили направление полета. Но что показалось мне действительно странным, так это то, что, хотя утки шли на меня тремя рядами по четыре в каждом, удалялись они уже пятью рядами по четыре в каждом. Как именно они перестроились, мне помешал разглядеть дым, однако я заметил, что положение в строю изменило минимальное число птиц. Мне доставит особое удовольствие узнать, что некий счастливчик смог решить эту задачу.

▼ Изменив положение наименьшего числа уток, расположите их в пять рядов по четыре.

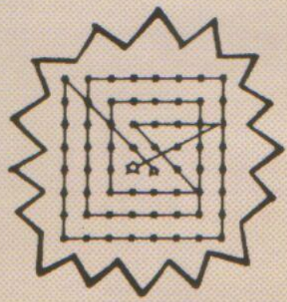


На рисунке показано 10 уток, приближающихся тремя рядами по четыре утки в каждом. Измените положение минимального числа уток так, чтобы птицы расположились пятью рядами по четыре утки в каждом. По счастливой случайности, перестановка укажет, сколько уток я подстрелил одним выстрелом.

Эту задачу можно решить практически, расставив маленькие фишки на иллюстрации и переместив их так, чтобы расположить их в пять рядов по четыре.

Решения

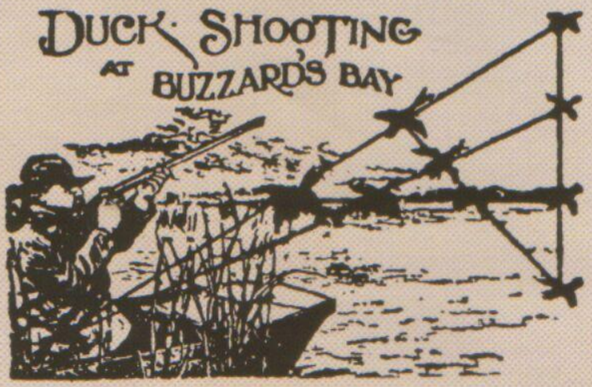
1. Чтобы решить задачу, достаточно четырнадцати отрезков.



2. Паровозы нужно двигать так:

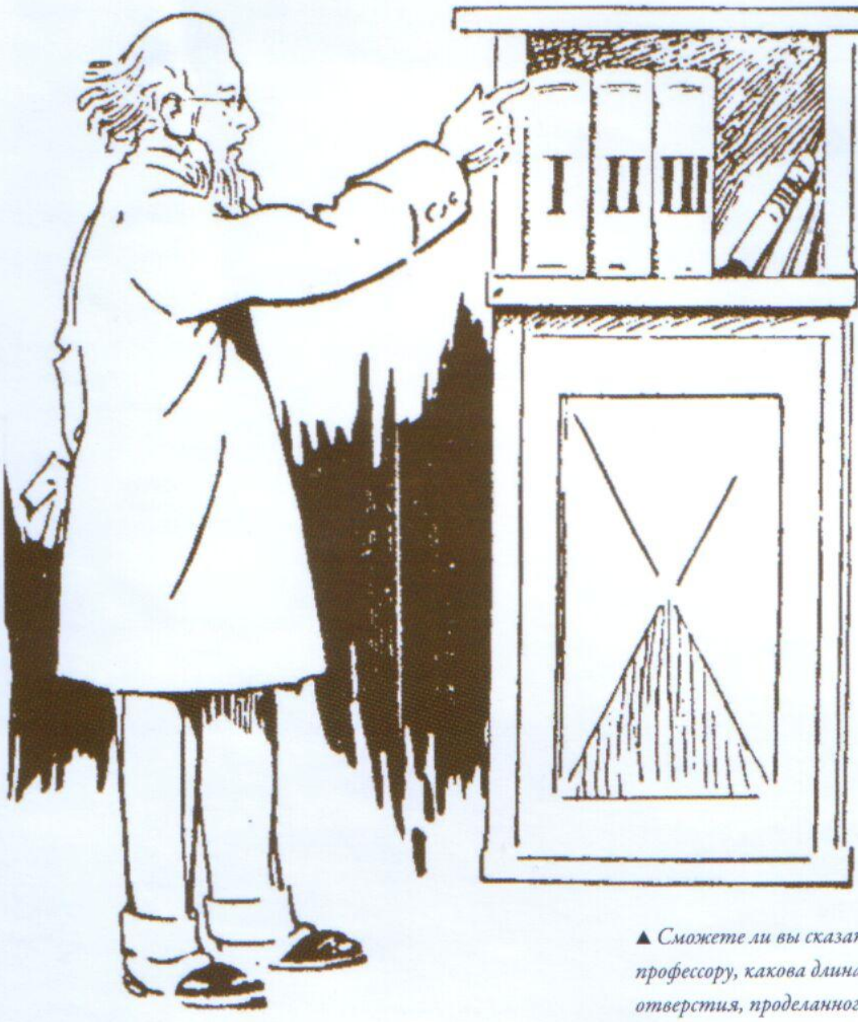
1. Отодвиньте паровоз R далеко вправо.
2. Заведите паровоз R в тупик.
3. Проведите паровоз L с тремя вагонами вправо.
4. Паровоз R возвращается на основной путь.
5. Паровоз R движется влево и ведет влево три вагона из тупика.
6. Заведите паровоз L в тупик.
7. Паровоз R и вагоны — вправо.
8. Паровоз R ведет семь вагонов влево.
9. Паровоз L — на основной путь.
10. Паровоз L — назад, до состава.
11. Паровоз L выводит пять вагонов из тупика на правую ветку.
12. Паровоз L движется назад и уводит последний вагон в тупик.
13. Паровоз L уводит четыре вагона вправо.
14. Паровоз L движется назад, уводя четыре вагона влево.
15. Паровоз L без вагонов движется вправо.
16. Паровоз L возвращается в тупик.
17. Паровоз L выводит вагон из тупика на основной путь.
18. Паровоз L возвращается влево.
19. Паровоз L движется вперед с семью вагонами.
20. Паровоз L возвращается в тупик с последним вагоном.
21. Паровоз L движется вправо с пятью вагонами.
22. Паровоз L возвращается влево с пятью вагонами.
23. Паровоз L движется вправо с одним вагоном.
24. Паровоз L возвращается в тупик.
25. Паровоз L движется с двумя вагонами вправо.
26. Паровоз L движется на ветку слева от тупика.
27. Паровоз L уводит семь вагонов вправо от тупика.
28. Паровоз L возвращается с последним вагоном в тупик.
29. Паровоз L движется вправо с шестью вагонами.
30. Паровоз R отходит вправо.
31. Поезд R со своими четырьмя вагонами следует в пункт назначения.
32. Поезд L возвращается в тупик.
33. К поезду L прицепляется третий вагон, и он радостно устремляется в путь.

3. Чтобы решить задачу об утиной охоте, нужно изменить положение двух уток, как показано на рисунке. В результате образуется пять рядов по четыре утки в каждом, а одна утка окажется в мешке охотника.



Лучшее от Генри Э. Дьюдени

Разные вопросы



▲ *Сможете ли вы сказать профессору, какова длина отверстия, проделанного книжным червем в книгах?*

1. Кто был первым?

Андерсон, Биггс и Карпентер вместе живут в домике на берегу. Как-то раз они вышли на лодке в море. Когда они находились на расстоянии в одну милю от берега, в них выстрелили из ружья.

К счастью, нас не интересует, кто стрелял в них и зачем, так как никакой информации об этом не сохранилось. Однако известных данных мне оказалось достаточно, чтобы составить любопытную задачу. По-видимому, Андерсон только услышал звук выстрела, Биггс увидел дым, а Карпентер увидел, как пуля ударилась о воду рядом с лодкой. Вопрос задачи таков: кто из них первым узнал о выстреле?

2. Головоломка с календарем

Если конец света наступит в первый день нового столетия, то какова вероятность, что это будет воскресенье?

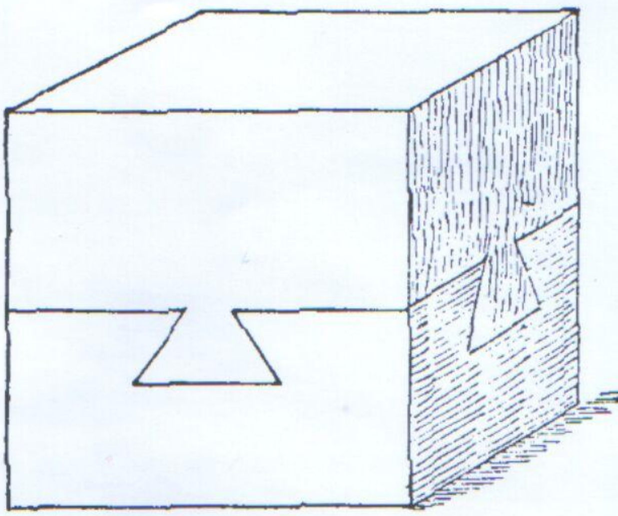
3. Трудолюбивый книжный червь

Наш друг профессор, которого вы можете видеть на рисунке, предложил мне одну из своих задач. Он объяснил, что с момента, когда ему в последний раз довелось снять с полки три тома крайне содержательного трактата, книжный червь проделал в них отверстие с первой страницы до последней. Профессор сказал, что толщина страниц каждого тома равна трем дюймам, толщина каждой обложки — ровно одной восьмой дюйма, и спросил, какую длину имеет отверстие, которое прогрыз книжный червь. Сможете ли вы дать ответ на этот вопрос?

4. Соединение «ласточкин хвост»

Далее представлена любопытная механическая головоломка, о которой мне рассказали несколько лет назад. Кто ее придумал, неизвестно.

Эта головоломка состоит из двух деревянных элементов, соединенных «ласточкиным хвостом». Все четыре вертикальные стороны головоломки выглядят в точности так, как те, что показаны на рисунке. Как соединены элементы



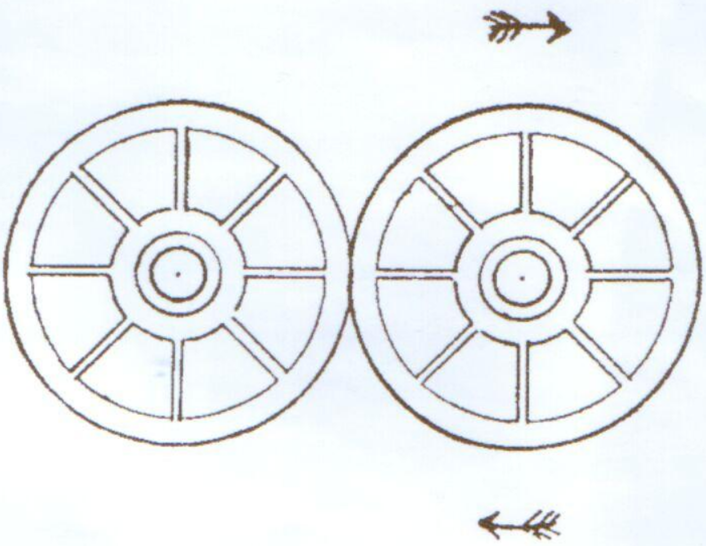
головоломки? Когда эту маленькую головоломку опубликовала одна из лондонских газет, я получил целую гору моделей из дуба, тика, красного дерева, палисандра, вяза и сосны, хотя и не просил об этом. Модели имели самый разный размер. Некоторые из них достигали половины фута, а одна крохотная модель имела площадь в половину квадратного дюйма. По всей видимости, головоломка привлекла немалый интерес читателей.

5. Задача о колесах

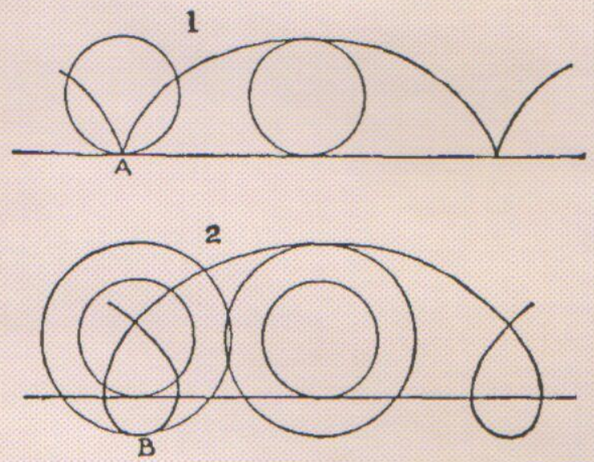
Движение колес обладает некоторыми особенностями, которые, возможно, покажутся удивительными для непосвященных. К примеру, когда поезд идет из Лондона в Кру, некоторые части поезда в любой заданный момент движутся в обратную сторону — из Кру в Лондон. Сможете ли вы указать, какие это части? Кажется абсурдным, что различные части одного и того же поезда могут одновременно двигаться в противоположных направлениях, но это и в самом деле так.

На иллюстрации изображены два колеса. Предполагается, что левое колесо неподвижно, а правое движется в направлении, указанном стрелкой. Сколько раз правое колесо повернется вокруг своей оси, выполнив полный оборот вокруг другого колеса? Не торопитесь с ответом. Если вы поспешите, то наверняка ошибетесь.

Проведите эксперимент с двумя монетами на столе, и вы удивитесь, когда увидите решение задачи собственными глазами.



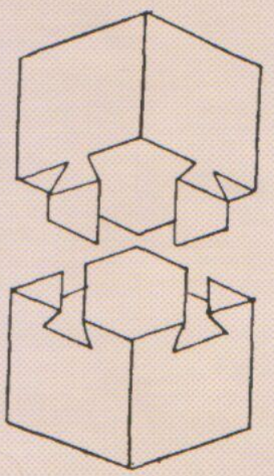
Решения



1. Биггс, который увидел дым, был первым, Карпентер, который увидел, как пуля ударилась о воду, был вторым, Андерсон, который услышал выстрел, — третьим.

2. Первый день нового столетия никогда не выпадает на воскресенье, равно как на среду и четверг.

3. Поспешный читатель решит, что червь прогрыз дыру с первой до последней страницы трехтомника, стоящего на полке; следовательно, отверстие пройдет через три тома и четыре обложки. В нашем случае это означает, что длина отверстия составит 9 с половиной дюймов, что очень далеко от верного ответа. Посмотрите на любые три стоящие рядом тома в вашей библиотеке, и вы увидите, что ближе всего ко второму тому расположены первая страница первого тома и последняя страница третьего тома. Таким образом, чтобы добраться от первой страницы трактата до последней, червь должен прогрызть всего четыре обложки (в сумме 1/2 дюйма) и все страницы второго тома (3 дюйма), то есть в общей сложности 3 1/2 дюйма.



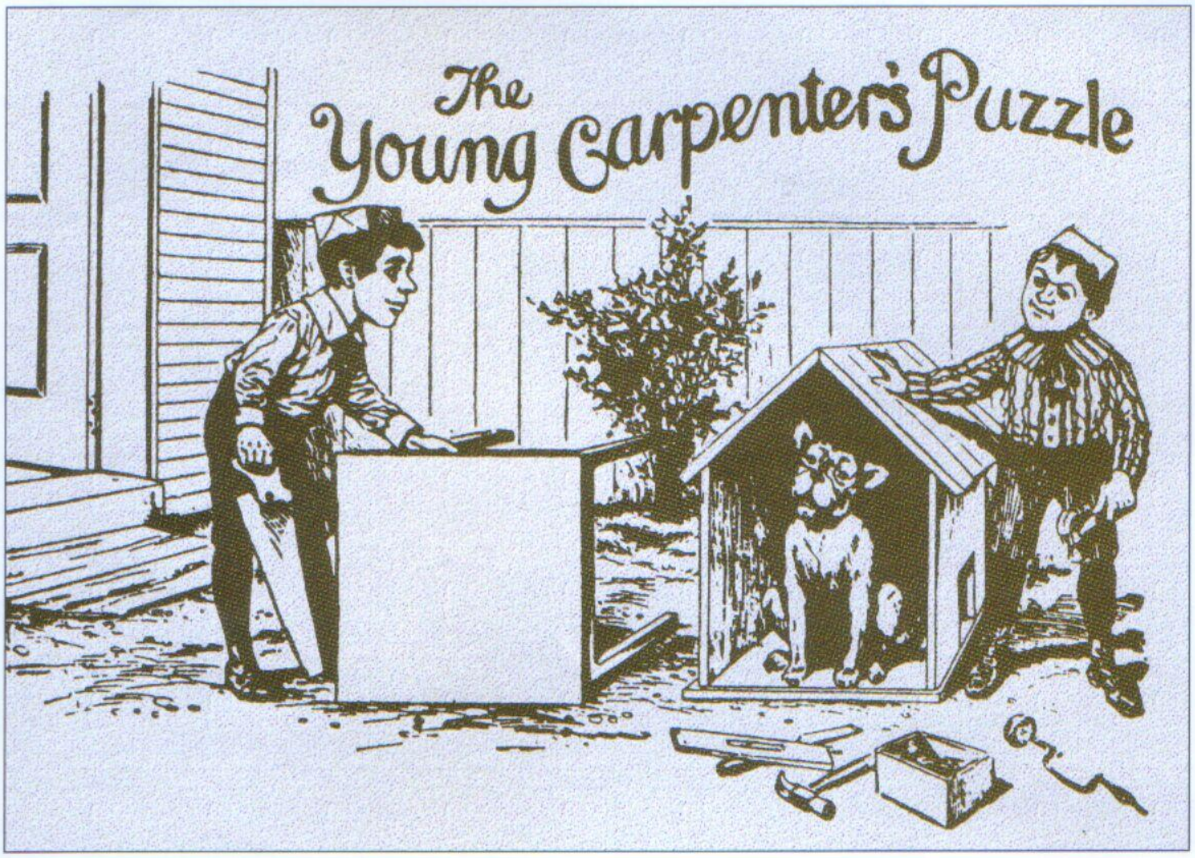
4. Взгляните на рисунок, и загадка тотчас прояснится. Как видите, чтобы разъединить элементы головоломки, достаточно сдвинуть их по диагонали.

5. Обозначим точку A на окружности колеса, которое движется по поверхности стола, подобно колесу поезда, которое катится по рельсу. Траекторией этой точки будет обычная циклоида, как показано на рис. 1. Однако траекторией точки B на ободе колеса поезда будет уже циклоида с самопересечениями, изображенная на рис. 2. Рассмотрим одну из петель этой циклоиды. «В любой данный момент» некоторые точки петли будут двигаться в направлении, противоположном направлению движения поезда. Так как число таких точек на ободе колеса бесконечно, при движении поезда они будут описывать бесконечное число петель. Таким образом, в любой данный момент определенные точки на ободе колеса будут двигаться в направлении, противоположном направлению движения поезда.

В примере с двумя колесами то колесо, которое вращается вокруг неподвижного колеса, будет совершать одновременно два вращательных движения вокруг своего центра.

Так как размер колес одинаков, очевидно, что если мы рассмотрим наивысшую точку окружности верхнего колеса, то эта точка, пройдя половину траектории, соприкоснется с самой нижней точкой на окружности нижнего колеса. Следовательно, эта точка вновь окажется в верхней части движущегося колеса и завершит полный оборот. Как следствие, верхнее колесо, выполнив полный оборот вокруг другого колеса, повернется вокруг своей оси два раза.

Некоторые задачи на деление



◄ *Каково минимальное число частей, на которые следует разрезать столешницу, чтобы достроить собачью будку?*

1. Головоломка молодого плотника

Уже иллюстрация к этой задаче способна рассказать многое. Не нужно быть Шерлоком Холмсом, чтобы сказать, что двое мальчишек нашли в сарае старый ящик с инструментами, их мама отправилась на собрание, а на дворе, должно быть, четверг, так как именно в этот день у прислуги выходной.

На рисунке можно увидеть еще немало интересного: например, как огромный пес пытается выбраться из конуры через маленькую дверцу, которую мальчишки проделали в одной из стенок. Однако эту задачу пес должен решить самостоятельно, а мы не будем терять времени и перейдем к нашей головоломке.

Как разрезать квадратную столешницу кухонного столика на минимально возможное число частей так, чтобы из них можно было изготовить недостающую стенку собачьей конуры?

2. Задача о Луне

Один известный специалист в статье, недавно опубликованной в медицинском журнале, пишет: «Если говорить о возможности лечения болезней напряжением воли, то отмечу, что в Швейцарии сила воображения столь сильна, что горные пастухи едят свой черный хлеб с превеликим удовольствием, веря, что это зеленый сыр, из которого сделана Луна, а дети дерутся за воображаемые порции».

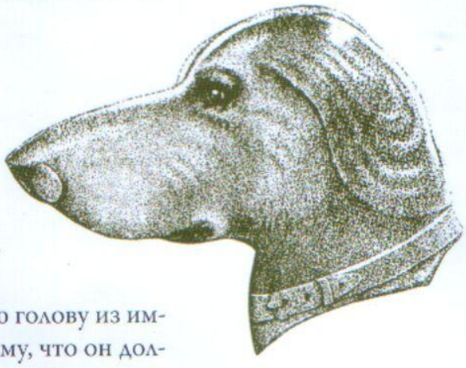
▼ *Если бы Луна была куском зеленого сыра, то на сколько частей вы смогли бы разделить ее пятью прямыми разрезами?*

Меня не интересуют религиозные аспекты этой старой истории, однако я обнаружил, что ее можно превратить в интересную задачу. Оставим в стороне нелепую фантазию изображенных на

рисунке пастухов и предположим, что главный резчик хочет разделить Луну на максимальное число частей пятью разрезами. К сожалению, пастухи должны будут довольствоваться маленькими кусочками, так как Луна находится в последней четверти, поэтому ее нужно разрезать максимально выгодным образом. Сможете ли вы помочь пастухам?

Проведите с помощью линейки и карандаша пять прямых линий и посмотрите, на сколько частей вы сможете разделить Луну.

3. Собачья голова из имбирного хлеба



Перед вами простая практическая задача на деление, которую я специально немного усложнил к большому удовольствию некоторых любителей головоломок.

Тудл получил в подарок собачью голову из имбирного хлеба. Родители сказали ему, что он должен поделиться с маленьким братом. Желая разделить подарок по справедливости, Тудл хочет узнать, как можно разделить собачью голову на две части одинаковой формы и размера.

Сколько внимательных любителей головоломок смогут помочь мальчику и покажут, как нужно разделить лакомство?

4. Алиса в стране чудес

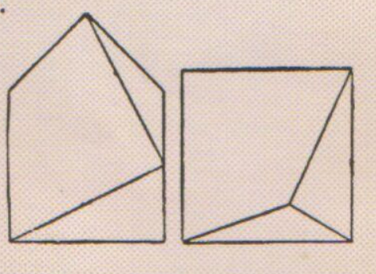
Вспомним удивительные приключения Алисы и Чеширского кота, который имел обыкновение растворяться в воздухе так, что от него оставалась лишь неотразимая улыбка. Когда Алиса впервые увидела кота, она захотела узнать, к какому виду животных он принадлежит. В Стране чудес все вопросы можно задавать только в письменном виде, и она записала свой вопрос. Однако по обычаю в Стране чудес написанное читают задом наперед, и Алиса записала вопрос так, как показано на рисунке. Читатель может начать и закончить фразу, где ему вздумается, — точно так же, как делают обитатели Страны чудес.

Сколькими разными способами можно прочитать вопрос Алисы «Was it a cat I saw?» — «Видела ли я кота?» Начните с любой буквы W, после чего каждый раз переходите к одной из смежных букв, пока не достигнете центральной буквы C, а затем вновь направляйтесь к краю. На каждом ходу можно переходить к любой из соседних букв — вверх, вниз, вправо, влево, но не по диагонали.

Сколькими способами можно прочесть вопрос «Was it a cat I saw?»

Решения

1.

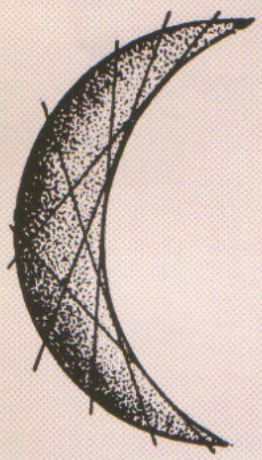


2. Используя особую форму Луны самым выгодным образом, можно разрезать кусок сыра на 21 часть.
(Было подсчитано, что максимальное число частей, на которые можно разделить круг n разрезами, равно

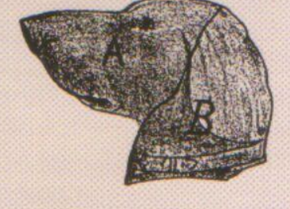
$$\frac{n^2 + n}{2} + 1.$$

Для растущей Луны это число возрастает до

$$\frac{n^2 + 3n}{2} + 1.)$$



3.



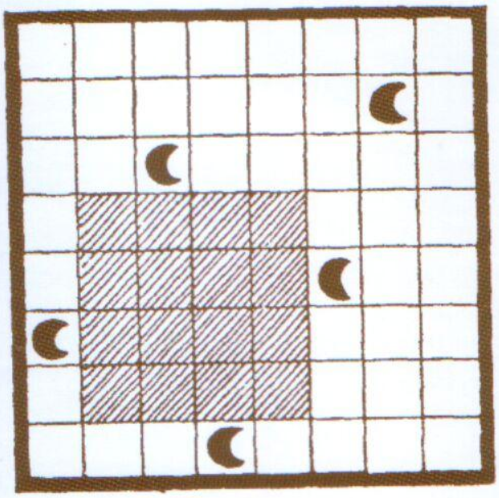
4. Многие прекрасные математики совершают ошибку, пытаясь решить задачу исходя из того, что число начальных и конечных точек равно 24. Они предполагают, что общее число вариантов равно 24 в квадрате, то есть 576. Но они упускают из вида боковые пути, то есть не учитывают еще 252 способа, которыми можно добраться до буквы C в центре. Так как вернуться к одной из букв W можно таким же числом способов, правильный ответ — 252 в квадрате, то есть 63 504.

Лучшее от Генри Э. Дьюдени

Последние головоломные задачи

1. Пять византийских полумесяцев

Когда отец Александра Македонского Филипп столкнулся с огромными трудностями при осаде Византия, он приказал воинам сделать подкоп под стены. Его план провалился: едва солдаты начали копать, как на небе взошла Луна и раскрыла осажденным намерения Филиппа. Радостные византийцы в знак благодарности воздвигли статую Дианы, а полумесяц с тех пор стал символом Византии. В храме со статуей находилась квадратная мозаичная площадка, составленная из шестидесяти четырех больших и дорогих мозаик. Все они имели гладкую поверхность, за исключением пяти, изображавших полумесяц. Эти пять по неизвестной причине располагались так, что каждая мозаика всегда была «защищена» (иными словами, находилась на одной горизонтальной, вертикальной или диагональной прямой) как минимум одним из полумесяцев. Византийский архитектор придал мозаике следующий вид:

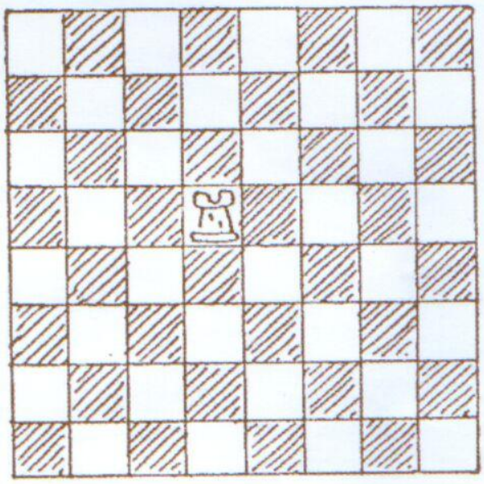


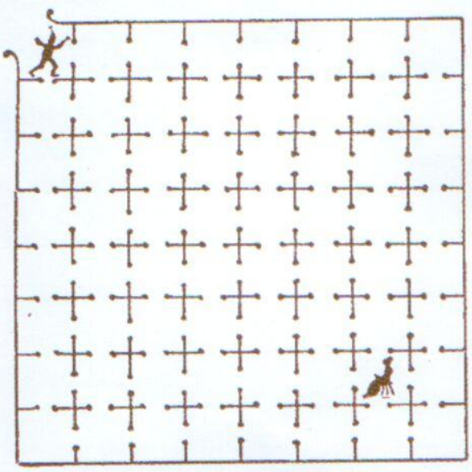
Наступить на один из пяти полумесяцев считалось тягчайшим преступлением и каралось медленной и мучительной смертью. На каком-то празднестве потребовалось постелить на мозаичный пол квадратный ковер наибольшего размера. На иллюстрации закрашена область максимально возможных размеров.

Покажите, как архитектор мог бы расположить полумесяцы согласно требуемым условиям, если бы предвидел, что поверх мозаики потребуется постелить квадратный ковер наибольшего размера так, чтобы ни один из полумесяцев не был закрыт ни полностью, ни частично.

2. Обход ладьи

Головоломка заключается в том, чтобы провести единственную ладью по шахматной доске так, чтобы она прошла по каждой клетке один и только один раз и закончила обход в той же клетке, где он был начат. Обход нужно совершить за минимально возможное число ходов. Если вы будете не слишком внимательны, то наверняка сделаете несколько лишних ходов. Разумеется, клетка считается посещенной как в случае, когда ладья проходит над ней, так и тогда, когда она останавливается на этой клетке. Предполагаем, что исходная клетка не будет считаться посещенной дважды.



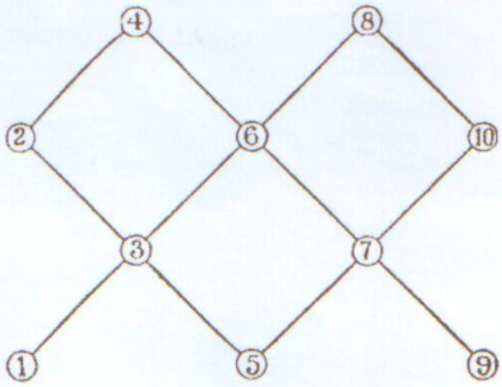


3. Пленная девушка

В старые добрые времена злодей-барон заточил невинную девушку в одно из глубочайших подземелий подо рвом, окружавшим замок. Как вы можете видеть, темница была разделена на шестьдесят три клетки, соединенные открытыми дверями, и девушка находилась в той клетке, которая указана на рисунке. Доблестный рыцарь, влюбленный в девушку, смог спасти ее от врага. Войдя в темницу там, где показано на рисунке, он добрался до клетки, где сидела девушка, пройдя через все клетки ровно один раз. Возьмите карандаш и попытайтесь начертить путь, которым следовал рыцарь. Когда вам удастся найти решение, попробуйте отыскать маршрут, состоящий из двадцати двух прямых отрезков. Такой маршрут существует, и он проходит через каждую клетку только один раз.

4. Головоломка с фишками

Перед вами новая головоломка с фишками или монетами, которая сначала покажется абсурдно простой, но в действительности вызовет определенные затруднения. Перенесите эту простую схему на бумагу в увеличенном виде, затем поместите две белые фишки в точки 1 и 2, а две красные фишки — в точки 9 и 10.



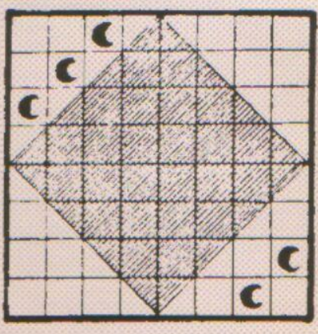
Головоломка заключается в том, чтобы поменять красные и белые фишки местами. Вы можете передвигать фишки по одной в любом порядке вдоль линий, из одной точки в другую, соседнюю или нет, так, чтобы эти точки всегда лежали на одной линии (например, можно переместить фишку из точки 9 в точку 6). Единственное ограничение заключается в том, что красная и белая фишка никогда не могут находиться на одной прямой. Так, первый ход можно сделать только из точки 1 или 2 в точку 3 либо из точки 9 или 10 в точку 7.

5. Звездная головоломка

Поставьте острие карандаша на одну из белых звезд, после чего, не отрывая карандаша от бумаги, соедините все звезды четырнадцатью прямыми непрерывными отрезками так, чтобы концом последнего была вторая белая звезда. Отрезки обязательно должны быть прямыми и могут идти в любом направлении. Менять направление можно только в какой-либо из звезд, но не между ними. Проводить линии через любую звезду можно несколько раз. В этой задаче начальная и конечная точки расположены неудобно, и вам не удастся найти решение, подобное решению задачи об обходе ладьи, даже если вместо ладьи вы будете использовать ферзя. Тем не менее допускается использовать наклонные линии: например, можно соединить верхнюю белую звезду со звездой в углу.

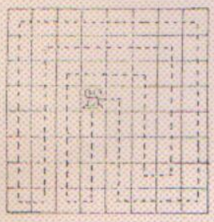
Решения

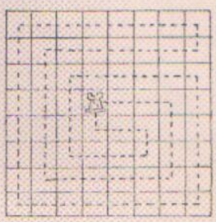
1. Если бы архитектор расположил пять полумесяцев так, как показано на рисунке,



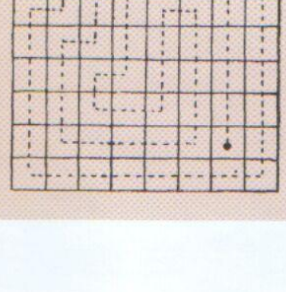
то каждая мозаика пола находилась бы на одной линии как минимум с одним полумесяцем, а свободного места оказалось бы достаточно, чтобы уместить ковер, по площади равный половине площадки. Любопытно, что возможны два или три решения, позволяющие покрыть ковром почти двадцать девять мозаик. Тем не менее приведенное на рисунке решение является оптимальным, а также единственным, при котором покрытой окажется ровно половина мозаик.

2. Единственные решения, содержащие минимальное число отрезков, приведены на двух иллюстрациях. Как видите, они состоят всего из 16 ходов. Большинству людей сложно найти решение, состоящее менее чем из 17 ходов.





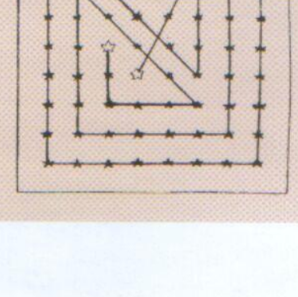
3. Пунктирная линия указывает путь из 22 прямых отрезков, вдоль которых должен следовать рыцарь.



Войдя в первую клетку, рыцарь должен сразу же вернуться обратно, прежде чем войти в другую клетку. В противном случае задача не будет иметь решения.

4. Нужно совершать ходы в следующей последовательности: 2–3, 9–4, 10–7, 3–8, 4–2, 7–5, 8–6, 5–10, 6–9, 2–5, 1–6, 6–4, 5–3, 10–8, 4–7, 3–2, 8–1, 7–10. Белые фишки поменяются местами с красными за 18 ходов, при этом не будет нарушено ни одно из условий задачи.

5. Решение показано на рисунке. 14 отрезков соединяют все звезды, обход начинается и заканчивается на белых звездах.



Монахини и купцы

1. Задача о монастыре

Задачу о монахинях из монастыря Монте-Маладетта можно встретить почти во всех старых сборниках головоломок, но она очень примитивна и потому не удовлетворит ожиданий любителей головоломок.

Мне помнится, что много лет назад, когда я в первый раз увидел решение этой задачи, то остался разочарован. Я также помню, что эта задача якобы имеет испанское происхождение, а в ее основе лежит случай, произошедший много веков назад. Недавно ко мне в руки попала старая испанская книга, где я нашел краткое упоминание о монастыре Монте-Маладетта, расположенном на одноименной горе — высочайшей вершине Пиренеев. В книге рассказывалось о том, как в эту часть Испании вторглись французские захватчики, которые в итоге были разбиты и должны были вернуться на родину через знаменитый перевал, где в течение более сотни лет происходило множество битв.

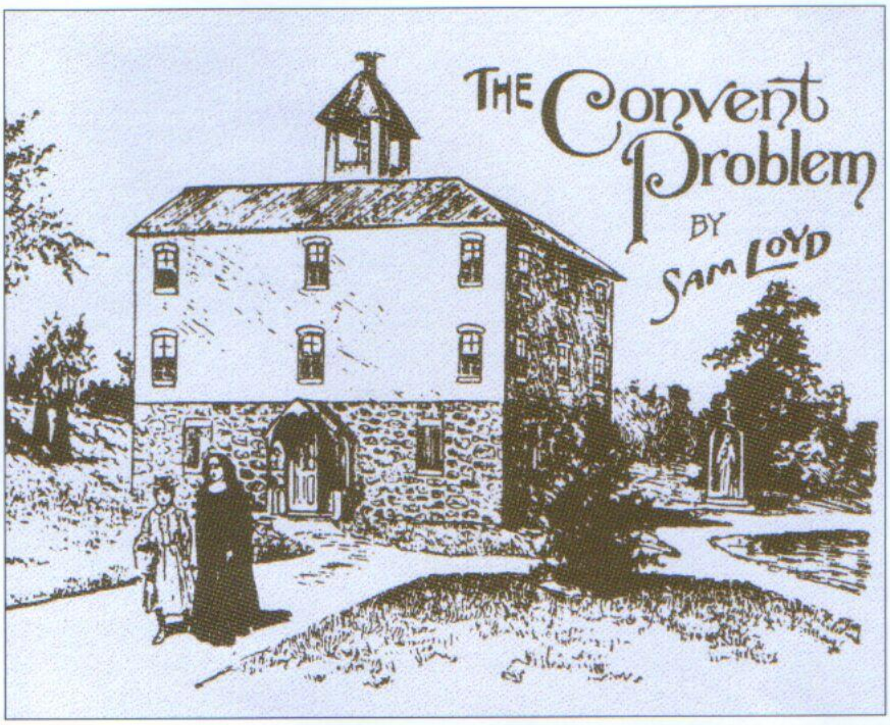
Прямое упоминание об этой головоломке звучит так: «Многие монахини были похищены французскими солдатами, что, несомненно, было отражено в известной задаче о монахинях монастыря Монте-Маладетта».

Так как в книге не приводилось никакого объяснения задачи, а самая известная ее версия допускает неоднозначные решения, я взял на себя смелость представить ее так, чтобы сохранить дух задачи и в то же время исключить любую возможную неоднозначность.

Монастырь, как показано на иллюстрации, представлял собой трехэтажное здание квадратной формы с шестью окнами на каждой стороне верхних этажей. Четко видно, что на каждом из верхних этажей находится по восемь комнат, что совпадает с описанием из старинной книги. По легенде, верхние этажи служили спальнями. На последнем этаже, где в каждой комнате находились кровати, размещалось в два раза больше монахинь, чем на втором.

Согласно старинному правилу основателей монастыря, настоятельница требовала, чтобы монахини располагались так, чтобы все комнаты были заняты. На последнем этаже должно было разместиться в два раза больше монахинь, чем на втором, а в шести комнатах на каждой из четырех сторон монастыря всегда должно было ночевать ровно 11 монахинь. В задаче описываются только два верхних этажа, поэтому учитывать первый этаж не нужно.

Случилось так, что после отступления французских войск через Пиренеи из монастыря пропали девять монахинь из числа самых юных и привлекательных. Всегда считалось, что их похитили солдаты. Тем не менее, чтобы не беспокоить настоятельницу, монахини решили скрыть пропажу, разместившись в комнатах так, чтобы все условия задачи по-прежнему соблюдались.



▲ *Сколько монахинь жило в монастыре и как они располагались в комнатах?*

Настоятельница во время ночного обхода увидела, что все комнаты заняты, вдоль каждой из четырех сторон монастыря расположилось одиннадцать монахинь, на третьем этаже было в два раза больше монахинь, чем на втором, однако девять монахинь исчезли. Сколько монахинь было в монастыре и как они расположились?

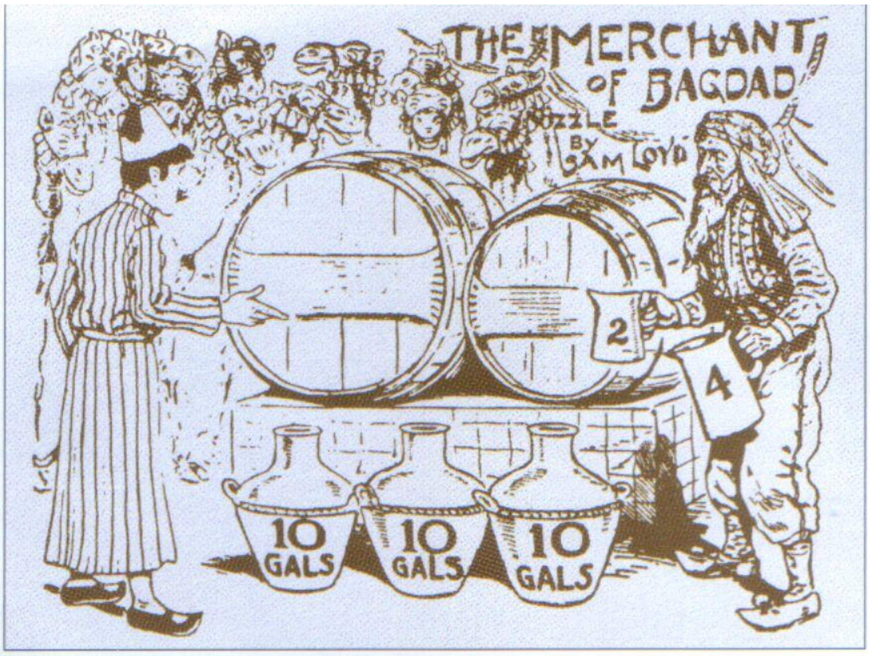
Достоинство задачи заключается в ее парадоксальных условиях: на первый взгляд кажется, что решить ее совершенно невозможно. Тем не менее, когда известно, что задача имеет ответ, для ее решения можно использовать в том числе экспериментальные методы. Надеюсь, что наши любители головоломок найдут задачу интересной и занимательной.

2. Багдадский купец

Багдадский купец, который продавал необходимые товары паломникам, пересекавшим пустыню, как-то раз столкнулся с занимательной задачей, о которой мы сейчас расскажем подробнее.

К торговцу пришел проводник каравана, который хотел купить вина и воды.

Он передал торговцу три сосуда. В первом находилось десять галлонов вина, во втором — три галлона воды, в третьем — смесь из трех галлонов



вина и трех галлонов воды. Проводник попросил у торговца по три галлона воды для каждого из 13 его верблюдов.

Так как по восточному обычаю воду и вино продают только четным количеством галлонов, у торговца был только один мерный сосуд объемом в два галлона и еще один — в четыре галлона. С их помощью он должен был решить задачу, которая оказалась неожиданно трудной. Тем не менее, не прибегая ни к какому дополнительному приспособлению и не используя никакой необычной меры, торговец отмерил воду из полной бочки (63 галлона) и вино из полного бочонка (31 1/2 галлона) в требуемых пропорциях, избежав потерь. Каково наименьшее число переливаний, которыми можно решить задачу?

Решения

1.

Третий этаж			Второй этаж		
1	5	1	1	2	1
5		5	2		2
1	5	1	1	2	1

После того как было похищено девять монахинь, остальные разместились следующим способом.

Третий этаж			Второй этаж		
3	2	3	1	1	1
1		1	1		2
4	1	3	1	1	1

2. В конце каждого абзаца указано число переливаний, описываемых в этом абзаце.

Бочка содержит 63 галлона воды, бочонок — 31 с половиной галлона вина. Наполнить три бутылки объемом в 10 галлонов вином, вылить оставшиеся полтора галлона в мерный сосуд на 2 галлона, опустошив таким образом бочонок с вином (4 переливания).

С помощью мерного сосуда объемом в 4 галлона наполнить бочонок из бочки, оставив 1/2 галлона в мерном сосуде на 4 галлона. Дать эту половину галлона верблюду № 1. С помощью мерного сосуда в 4 галлона перелить 28 галлонов воды из бочонка в бочку. Перелить 1 1/2 галлона вина из мерного сосуда на 2 галлона в мерный сосуд на 4 галлона. Перелить 2 галлона воды из бочонка в мерный сосуд объемом в 2 галлона и вылить их в бочку. Взять оставшиеся в бочонке 1 1/2 галлона воды мерным сосудом в 2 галлона и напоить верблюда № 2. Вылить 1 1/2 галлона вина из мерного сосуда на 4 галлона в мерный сосуд на 2 галлона (37 переливаний).

Повторить переливания, описанные в предыдущем абзаце, еще 11 раз. В результате шесть верблюдов получат 1/2 галлона воды по 2 раза, а еще шесть — 2 раза по 1 1/2 галлона. При десятом и одиннадцатом повторении вместо того, чтобы вылить 2 галлона в бочку, дайте их двум любым верблюдам, которым дважды досталось всего по 1/2 галлона. Теперь восемь верблюдов получили по 3 галлона каждый, четыре верблюда — по 1 галлону каждый, а в бочке осталось 35 галлонов воды (всего 407 переливаний).

Наполните бочонок водой из бочки мерным сосудом в 4 галлона и дайте оставшуюся половину галлона верблюду № 13. Вылейте 3 галлона из бочки в мерный сосуд на 4 галлона (18 переливаний).

Вновь перелейте все вино в бочку. Наполните из бочонка 3 бутылки по 10 галлонов, затем вылейте оставшиеся 1 1/2 галлона в мерный сосуд объемом 2 галлона. Вновь вылейте содержимое трех бутылок в бочку и перелейте 1 1/2 галлона из мерного сосуда в 2 галлона в бутылку № 1 (12 переливаний).

Наполните мерный сосуд на 2 галлона из мерного сосуда на 4 галлона. В последнем останется 1 галлон. Наполните бочонок мерным сосудом на 2 галлона и дайте оставшиеся 1/2 галлона верблюду № 13. Дайте 2 галлона каждому из пяти оставшихся верблюдов. Все верблюды будут напоены (13 переливаний).

Наполните две пустые бутылки водой из бочки и вылейте оставшиеся 1 1/2 галлона в бутылку № 1. Вылейте в бочонок содержимое бутылок под номерами 2 и 3 (5 переливаний).

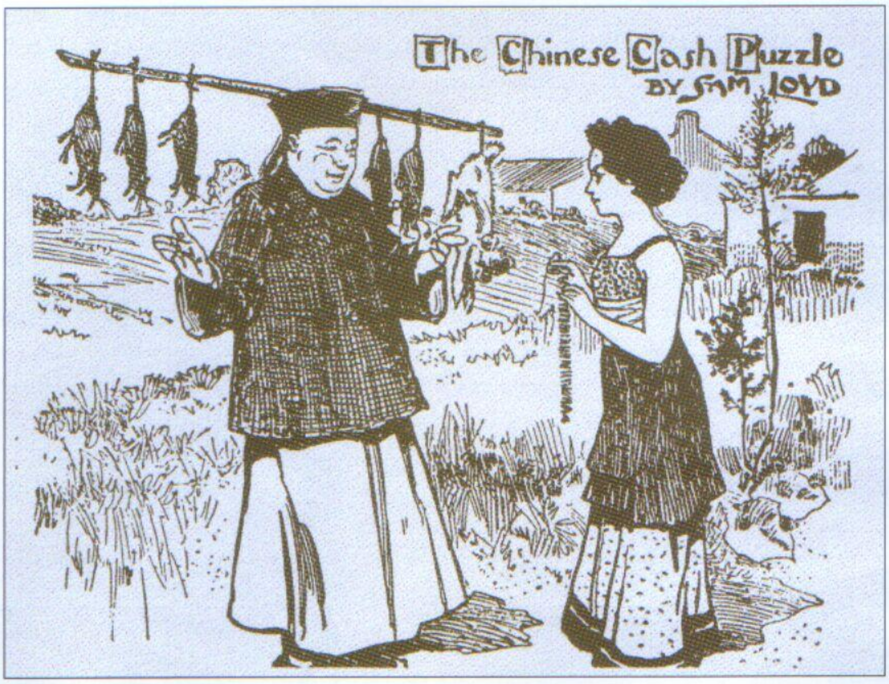
Вылейте 1 галлон из мерного сосуда на 4 галлона в бутылку № 2. Перелейте 6 галлонов вина в бутылку № 3, используя мерные сосуды на 2 и 4 галлона. Перелейте 1 галлон из бутылки № 2 в мерный сосуд на 4 галлона и наполните последний вином из бутылки № 3. Вылейте содержимое мерного сосуда на 4 галлона в бутылку № 2. Возьмите 2 галлона воды из бочонка и налейте их в бутылку № 2 (10 переливаний).

Тринадцать верблюдов получили по 3 галлона воды каждый, в одной из бутылок на 10 галлонов находится 3 галлона воды, в другой — 3 галлона вина, в третьей — смесь из 3 галлонов вина и 3 галлонов воды. В бочке осталось 25 1/2 галлона вина, в бочонке — 18 галлонов воды. Общее число переливаний — 506.

(В интервью, опубликованном в апрельском номере журнала Strand Magazine за 1926 год, Генри Дьюдени, британский мастер головоломок, упомянул, что Лойд как-то попросил у него помощи в решении этой задачи. Лойд предложил премию автору лучшего решения среди читателей и очень хотел найти свое решение, которые превосходило бы прочие: таким образом выдачи премии удалось бы избежать. Дьюдени нашел решение из 521 переливания, которое позже свел к решению из 506 переливаний, приведенному выше. Это решение действительно оказалось лучше всех, присланных читателями, и Лойд не раз говорил, что Дьюдени сэкономил ему несколько тысяч долларов.)

Лучшее от Сэма Лойда

Задачи из Китая и Сиама



▲ *Сколько монет потребуется, чтобы купить щенка?*

1. Задача о китайских деньгах

Китайцы чеканили деньги за тысячи лет до рождества Христова, однако их неспособность понять основные принципы хождения денег порой приводила к очень экстравагантным и нестандартным решениям. В Цветочном царстве при важных сделках использовались золотые слитки, на которых чеканились имя банкира и дата. Стоимость разменной монеты царства постоянно менялась. Монеты с каждым разом становились все тоньше, и в итоге стопка из 2000 монет стала иметь в высоту меньше трех дюймов. Разменные монеты из бронзы с треугольным, круглым или квадратным отверстием в середине и ценностью чуть большей, чем одна тысячная нашей монеты, также имели разную толщину. Чтобы подсчитать стоимость таких денег, китайцы нанизывали их на проволоку, а затем измеряли высоту полученной стопки. Предположим, что 11 монет с круглым отверстием равны по стоимости 15 центам, 11 с квадратным отверстием — 16 центам, а 11 с треугольным отверстием — 17 центам. Сколько монет с круглым, треугольным и квадратным отверстием потребуется, чтобы купить упитанного щенка стоимостью 11 центов?

2. Китайская головоломка

Колодки, обездвиживающие голову и руки незадачливого преступника, изображенного на рисунке, изготовлены из квадратной доски, разделенной на две части. Как и все математические задачи, эту головоломку можно решить двумя способами: либо определить, как нужно разрезать квадрат, чтобы изготовить из него колодки, либо наоборот, разделить колодки пополам так, чтобы из полученных частей можно было составить квадрат.

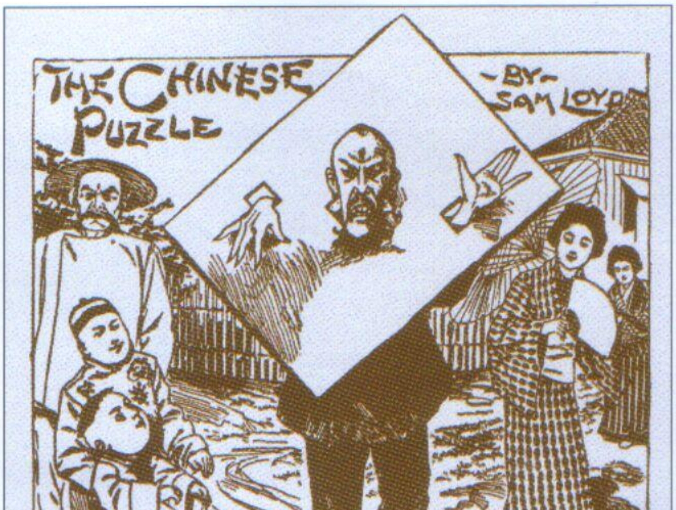
Возьмите лист бумаги в форме квадрата и разрежьте его на две части так, чтобы получились колодки в форме прямоугольника с отверстиями для шеи и рук пленного. Две части, из которых состоят колодки, можно расположить так, что они образуют идеальный квадрат, а все три отверстия при этом будут закрыты. Существует небольшая хитрость, связанная с тем, как можно расположить отверстия в точности так, как показано на рисунке.

3. Сиамские бойцовые рыбки

Сиамцы — прирожденные игроки, которые при любой возможности поставят на кон даже собственную одежду. Они не воинственны, однако обожают наблюдать за боями других животных, начиная от жаб и заканчивая слонами. Собачьи или петушиные бои в Сиаме — обычное дело, и они проводятся согласно традициям цивилизованных стран. Но ни в одном другом уголке Земли вы не увидите бои между рыбками!

В Сиаме есть два вида рыб, которые хоть и пригодны для употребления в пищу, но ценятся только из-за своих боевых качеств. Одна из них — большой белый окунь под названием царь-рыба, другая — маленький черный карп, или рыба-дьявол. Эти два вида рыбок питают друг к другу такую неприязнь, что, завидев противника, сразу бросаются в бой и дерутся до смерти.

▼ *Разделите квадратный лист бумаги на две части и составьте из них фигуру, изображенную на рисунке.*



▲ *За какое время маленькие рыбки одолеют больших?*

Царь-рыба может победить одну или двух мелких рыбок за несколько секунд, но рыбы-дьяволы столь проворны и движутся вместе столь искусно, что три таких рыбы подобны одной большой, и царь-рыба может безрезультатно сражаться с ними на протяжении нескольких часов.

Они нападают очень точно и действуют по науке, поэтому четыре маленькие рыбки способны убить одну большую за три минуты, а пять нанесут царь-рыбе смертельный удар за соответствующее время (пример: пять рыбок способны убить царь-рыбу за 2 минуты 24 секунды, шесть — за 2 минуты и так далее).

Это соотношение сил столь точно, что на турнире всегда можно рассчитать время, за которое определенное число рыбок одного вида победит заданное число рыбок другого вида.

На иллюстрации изображен бой четырех больших рыб и тринадцати маленьких.

Кто победит? Сколько времени будет продолжаться поединок?

(Чтобы избежать неточностей в формулировке задачи, следует пояснить, что рыбки-дьяволы всегда нападают на царь-рыбу группами в три и более, и не отпускают эту рыбу, пока не разделаются с ней.

К примеру, мы не можем предположить, что пока двенадцать рыбок-дьяволов сражаются с четырьмя большими, тринадцатая рыбка-дьявол нападает на всех больших рыб по очереди.

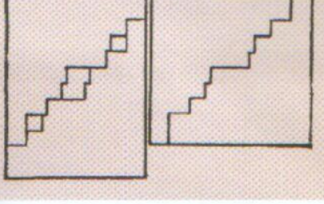
Если мы допускаем рассмотрение дробного числа рыбок-дьяволов, то можем заключить, что если четыре рыбки-дьявола убивают царь-рыбу за три минуты, то тринадцать рыбок-дьяволов покончат с царь-рыбой за 12/13 минуты, а с четырьмя царь-рыбами — за 48/13 минуты (3 минуты, 41 и 7/3 секунды).

Однако эти же самые рассуждения приводят к следующему выводу: двенадцать рыбок-дьяволов убьют царь-рыбу за минуту, а четырех царь-рыб — за четыре минуты, даже без помощи рыбки-дьявола под номером тринадцать. Этот вывод очевидно противоречит предпосылке Лойда, согласно которой три маленькие рыбы не могут убить одну большую.)

Решения

1. Согласно условию задачи, монета с круглым отверстием стоит 15/11 цента, монета с квадратным отверстием — 16/11 цента, монета с треугольным отверстием — 17/11 цента. Щенок стоит 11 центов, поэтому его можно купить за 1 монету с квадратным отверстием и 7 монет с круглым отверстием.

2. Хитрость задачи заключается в том, что два стыка на границах центрального отверстия закрыты головой пленного. На следующем рисунке показано, как нужно разрезать доску согласно условиям задачи.



3. Если бы в аквариуме находилось столько же рыбок, сколько я получил ответов к этой задаче (и все разные!), то разыгралась бы настоящая битва! Во имя ясности и простоты я буду считать правильным следующее решение часовщика.

Три маленькие рыбки равны по силе каждой из трех больших и будут отвлекать их, пока четыре другие маленькие рыбки убьют четвертую большую рыбу ровно за 3 минуты. Затем пять маленьких рыбок займутся одной большой и убьют ее за 2 минуты 24 секунды, пока остальные маленькие и большие рыбы будут сражаться между собой.

Очевидно, что если бы к двум оставшимся группам рыбок присоединилась еще одна, то все они одержали бы победу над противником за одинаковое время, так как каждая из больших рыб смогла бы оказывать им сопротивление в течение 2 минут и 24 секунд. Следовательно, если теперь на большую рыбу нападают семь рыбок вместо одной, они справятся с большой рыбой за 1/7 часть этого времени, то есть за 20 и 4/7 секунды.

Когда мелкие рыбки разделят силы, чтобы напасть на двух оставшихся больших рыб (на одну нападут семь рыбок, на другую — шесть), по прошествии 20 и 4/7 секунды все мелкие рыбки нападут на последнюю царь-рыбу. Тринадцать маленьких рыбок совместными усилиями одолеют ее за 1/13 этого времени, то есть за 1 секунду и 53/91.

Сложив продолжительность этих «раундов» — 3 минуты, 2 минуты 24 секунды, 20 и 4/7 секунды, 1 и 53/91 секунды, — получим, что бой будет продолжаться 5 минут, 46 и 2/13 секунды.